# Definitionen und Aussagen zu Gruppen

Michael Hortmann

Eine ***Gruppe*** ist ein geordnetes Paar $(G,\bullet)$.

Dabei ist $G$ eine nicht-leere Menge,
$\bullet$ ist eine Verknüpfung (Abbildung) $G \times G \to G$, wobei man i.a. $a \bullet b$ oder gar nur $ab$ statt $\bullet(a,b)$ schreibt.

Es gelten die „Gruppenaxiome“:

1. ***Assoziativgesetz:*** $\forall a,b,c \in G:\ a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
2. ***Eindeutig bestimmtes neutrales Element:*** $\exists! e \in G\ \forall a \in G: e \bullet a = a \bullet e = a$
3. ***Eindeutig bestimmte inverse Elemente:*** $\forall a \in G\ \exists! a^{-1} \in G: a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e$

(Dabei bedeutet $\exists!$ : es gibt genau ein)

Gilt für die Verknüpfung auch das
***Kommutativgesetz****:* $\forall a,b \in G: a \bullet b = b \bullet a$
so spricht man von einer ***kommutativen Gruppe*** oder auch ***abelschen Gruppe***.

Beispiele für Gruppen:

1. Die „triviale Gruppe“ $G = \{e\}$
2. Die ganzen Zahlen: $(\mathbb{Z},+)$ mit der Addition als Verknüpfung und 0 als neutralem Element. Dabei schreibt man $-n$ für das additiv-inverse Element einer ganzen Zahl $n$.
3. Die positiven Brüche $\left\{ \frac{m}{n} \middle| m,n \in \mathbb{N} \right\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung und $1 = \frac{1}{1}$ als neutralem Element. Dabei ist $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{m}$.
4. $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$, also die reellen Zahlen ungleich 0 mit der Multiplikation als Verknüpfung und neutralem Element 1.

5. Die 2x2 Matrizen der Form $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}, (a \neq 0 \vee b \neq 0) \right\}$ mit der Verknüpfung

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-by' \\ ba'+ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$, wie man leicht nachprüft. Diese Gruppe ist im Gegensatz zu den meisten Gruppen von Matrizen „zufällig“ kommutativ.

6. Die Gruppe $\mathfrak{S}_n = \{\pi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n \mid \pi \text{ bijektiv}\}$ [1]. Man nennt die Elemente von $\mathfrak{S}_n$ auch „Permutationen vom Grad *n*“. Die Gruppenoperation ist die Hintereinanderschaltung von Abbildungen und die „identische Abbildung“, also diejenige, die alle Elemente von $\mathbb{N}_n$ auf sich selbst abbildet, ist das neutrale Element. Man kann sich eine Permutation als Tabelle

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ... | $n$ |
| $\pi(1)$ | $\pi(2)$ | $\pi(3)$ | ... | $\pi(n)$ |

hinschreiben. Es ist üblich, stattdessen nur die zweite Zeile, also $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ zu notieren. Das Inverse einer Permutation $\pi$ findet man, indem man zu gegebenem $y \in \mathbb{N}_n$ dasjenige $x \in \mathbb{N}_n$ sucht, für welches $\pi(x) = y$. Auf Grund der Bijektivität von $\pi$ gibt es so ein $x \in \mathbb{N}_n$, und es ist eindeutig bestimmt. Man setzt also $\pi^{-1}(y) = x$. Praktisch macht man das dann so, daß man zunächst in der Zeile $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ $y$ aufsucht. $x$ ist dann die Nummer der Stelle, an der $y$ steht. Will man z.B. $\pi = (5,3,7,9,6,8,2,4,1) \in \mathfrak{S}_9$ invertieren, so steht 1 an 9. Stelle, 2 an 7. Stelle, etc. und es ergibt sich $\pi^{-1} = (9,7,2,8,1,5,3,6,4)$ .

Die Permutationsgruppen sind ab *n*=3 nicht kommutativ. Z.B. ist $(3,2,1) \circ (2,3,1) = (2,1,3)$ und $(2,3,1) \circ (3,2,1) = (1,3,2)$.

In allen Gruppen $G$ gelten die folgenden, leicht zu beweisenden Formeln:

1. $\forall a \in G : \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
2. $\forall a, b \in G : (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
3. $\forall a, b, c \in G :\ (ac = bc \to a = b) \wedge (ca = cb \to a = b)$ (Kürzungsregeln)

Wird später fortgesetzt.

[1] $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$