Definitionen und Aussagen zur Differentialrechnung

Es geht darum, Abbildungen durch lineare Abbildungen zu approximieren. Geometrisch bedeutet dies, Tangenten, Tangentialebenen oder Tangentialräume an Kurven, Flächen, Räume zu konstruieren.

Als Einführung betrachten wir eine Abbildung $f: I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Der Graph von f ist die Menge $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \in I\}$. Zu einem gegebenen $x_0 \in I$ betrachtet man für die Nachbarpunkte $x \in I$ die *Differenzenquotienten* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Existiert der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

so ist dies offenbar die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
Sei $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\xi \to f'(x_0)\xi$ gegebene lineare Abbildung

Offenbar ist kann man die Tatsache, daß die Zahl $f'(x_0)$ gleich dem Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist, auch ausdrücken durch die Gleichung $\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| = 0$.

Da nun aber

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \right| = \frac{\left| (f(x)-f(x_0)) - \varphi(x-x_0) \right|}{|x-x_0|},$$

ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $\lim_{x\to x_0} \frac{\left| (f(x)-f(x_0)) - \varphi(x-x_0) \right|}{|x-x_0|} = 0$. Diese Formulierung läßt sich ohne weiteres auf höhere Dimensionen übertragen:

Dazu betrachten wir $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, eine offene Teilmenge[1] $U \subset \mathbb{R}^n$, eine Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^m$ und einen Punkt $x_0 \in U$. f heißt *in* $x_0 \in U$ *differenzierbar*, wenn eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, die f in $x_0 \in U$ in folgendem Sinne approximiert:

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{\left\| (f(x)-f(x_0)) - \varphi(x-x_0) \right\|}{\|x-x_0\|} \right) = 0$$

[1] Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn zu jedem ihrer Punkte eine offene Kugel um diesen Punkt existiert, die ganz in ihr enthalten ist.

Ist f in $x_0 \in U$ differenzierbar, so läßt sich leicht zeigen, daß die approximierende lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eindeutig bestimmt ist. φ heißt *Ableitung* von f in $x_0 \in U$, und man schreibt für die Ableitung auch $Df(x_0)$ oder $f'(x_0)$.

Die Ableitung ist also eine lineare Abbildung!
Im folgenden werden wir die lineare Abbildung $Df(x_0)$ häufig mit der zugehörigen *nxm*-Matrix identifizieren.

Wir werden *Differentiationsregeln* aufstellen, die es erlauben, die Ableitungen vieler Abbildungen zu berechnen, ohne in diffizile Grenzwertberechnungen einsteigen zu müssen.

Zunächst stellen wir ohne Beweis fest, daß aus der Differenzierbarkeit einer Abbildung in einem Punkt ihre Stetigkeit in diesem Punkt folgt. Auch nennen wir die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von U differenzierbar ist.

Beispiele differenzierbarer Abbildungen

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ konstant, d.h. es gibt ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = b$ für alle $x \in U$. Dann ist f in U differenzierbar, und es gilt für alle $x_0 \in U$: $Df(x_0) \equiv 0$.
Um dies zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß f durch die Nullabbildung im Punkt $x_0 \in U$ entsprechend der Definition approximiert wird. Dies ist trivialerweise der Fall, weil für alle $x \in U$: $f(x) - f(x_0) = b - b = 0$, und deshalb ist schon $\frac{\|(f(x) - f(x_0)) - 0\|}{\|x - x_0\|} = 0$

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affin, also von der Form $f(x) = \varphi(x) + b$ mit linearem φ.
Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}^n$ differenzierbar, und es gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $Df(x_0) = \varphi$.
Um dies nachzuweisen, bilden wir für $x \in \mathbb{R}^n$ die Differenz $f(x) - f(x_0) - \varphi(x - x_0)$. Diese ist aber wegen der Linearität von φ gleich Null. Damit wird auch der Grenzwert in der Definition Null.

Im eindimensionalen Fall kennen wir das aus der Schule: ist $f(x) = ax + b$, so ist $f'(x_0) = a$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$. Wir zeigen, daß f in jedem Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist. Die Ableitung $Df\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ist dann jedenfalls eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir werden zeigen die Ableitung die Matrixdarstellung daß (y_0, x_0) besitzt.

Also rechnen wir:

$$\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = xy - x_0 y_0 - y_0 \left(x - x_0 \right) - x_0 \left(y - y_0 \right) =$$
$$xy - x_0 y_0 - y_0 x + y_0 x_0 - x_0 y + x_0 y_0 = xy - xy_0 + x_0 y_0 - x_0 y = x\left(y - y_0 \right) - x_0 \left(y - y_0 \right) = \left(x - x_0 \right)\left(y - y_0 \right)$$

Jetzt berechnen wir, wie in der Ableitungsdefinition verlangt, den Quotienten

$$\frac{\left\| \left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \left(x - x_0 \right) \right| \left| \left(y - y_0 \right) \right|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} \leq \frac{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|^2}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|$$

Dabei haben wir benutzt:

$$\left| x - x_0 \right| \leq \sqrt{\left(x - x_0 \right)^2} \leq \sqrt{\left(x - x_0 \right)^2 + \left(y - y_0 \right)^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|$$
$$\left| y - y_0 \right| \leq \sqrt{\left(y - y_0 \right)^2} \leq \sqrt{\left(x - x_0 \right)^2 + \left(y - y_0 \right)^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|$$

Wegen $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| = 0$ ist auch $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\left\| \left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} = 0$,

was zu beweisen war.

Später werden wir Ableitungen nicht mehr auf diese Weise „zu Fuß“ berechnen müssen.

Als erste und wichtigste Differentiationsregel nennen wir die

Kettenregel

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in U$, $y_0 = f\left(x_0 \right) \in V$.
Sind f in x_0 und g in y_0 differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und
$Dh\left(x_0 \right) = Dg\left(y_0 \right) \circ Df\left(x_0 \right)$

Wird fortgesetzt.