Tensorprodukt

Exakte Sequenzen von Vektorräumen

Sind *U,V,W* Vektorräume über *K* und $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ lineare Abbildungen, so heißt diese Sequenz *halbexakt*, wenn $\ker\psi \supset \operatorname{Im}\varphi$, wenn also $\psi \circ \varphi = 0$, d.h. $\forall u \in U : \psi(\varphi(u)) = 0$.
Sie heißt *exakt*, wenn sogar $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$, wenn also zusätzlich gilt:
$\forall v \in V : \big((\psi(v)=0) \Rightarrow (\exists u \in U : \varphi(u)=v)\big)$.
Eine längere Sequenz $U_1 \xrightarrow{\varphi_1} U_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} U_{n+1}$ heißt (halb)exakt, wenn jede der Teilsequenzen $U_1 \xrightarrow{\varphi_1} U_2 \xrightarrow{\varphi_2} U_3, \dots, U_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} U_n \xrightarrow{\varphi_n} U_{n+1}$ (halb)exakt ist.

Man denkt sich den (einpunktigen) 0-dimensionalen Vektorraum als eindeutig bestimmt und bezeichnet ihn mit 0. Es gibt offenbar zu jedem *K*-Vektorraum *V* genau eine Abbildung $0 \to V$ und genau eine Abbildung $V \to 0$.

Ist $0 \to U \xrightarrow{\varphi} V$ exakt, so bedeutet dies gerade, daß φ injektiv ist.
Ist $U \xrightarrow{\varphi} V \to 0$ exakt, so ist φ surjektiv.

Betrachten wir nun folgendes Diagramm von Abbildungen zwischen *K*-Vektorräumen

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & \xrightarrow{\psi_1} & V_1 & \xrightarrow{\psi_2} & V_2 & & \\ \uparrow\chi_0 & & \uparrow\chi_1 & & & & \\ U_0 & \xrightarrow{\varphi_1} & U_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & U_2 & \to & 0 \end{array} ,$$

wobei die obere Zeile halbexakt und die untere Zeile exakt sei. Man sagt, ein Diagramm *kommutiert*, wenn alle Möglichkeiten, über verschiedene Abbildungswege von einem Raum zum anderen zu gelangen, zum gleichen Ergebnis führen. Im obigen Fall heißt dies: $\psi_1 \circ \chi_0 = \chi_1 \circ \varphi_1$.

Für obiges Diagramm gibt es genau eine Möglichkeit, es durch eine Abbildung $U_2 \xrightarrow{\chi_2} V_2$ so zu ergänzen, daß auch

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & \xrightarrow{\psi_1} & V_1 & \xrightarrow{\psi_2} & V_2 & & \\ \uparrow\chi_0 & & \uparrow\chi_1 & & \uparrow\chi_2 & & \\ U_0 & \xrightarrow{\varphi_1} & U_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & U_2 & \to & 0 \end{array}$$

kommutativ ist. Dies wird im folgenden gezeigt.

Um eine geeignete Abbildung $U_2 \xrightarrow{\chi_2} V_2$ zu konstruieren, die das Diagramm kommutativ macht, geht man so vor: Zu $u_2 \in U_2$ gibt es wegen der Surjektivität von φ_2 ein $u_1 \in U_1$ mit $\varphi_2(u_1) = u_2$.

Also setzt man $\chi_2(u_2) := \psi_2(\chi_1(u_1))$. Eine andere Vorschrift kann man offenbar auch gar nicht machen, wenn das Diagramm kommutieren soll.

Nun hätte man zwar ein anderes Urbild von u_2 finden können, z.B. $\varphi_2(u'_1) = u_2$ und muß also zeigen, daß $\psi_2(\chi_1(u_1)) = \psi_2(\chi_1(u'_1))$, d.h. daß $\chi_2(u_2)$ wohldefiniert ist und nicht von der Wahl des Urbilds abhängt. Offenbar ist $\varphi_2(u_1 - u'_1) = 0$ und wegen der Exaktheit der unteren

Sequenz gibt es jetzt ein $u_0 \in U_0$ mit $\varphi_1(u_0) = u_1 - u'_1$. Weil das Diagramm kommutiert, ist $\psi_1(\chi_0(u_0)) = \chi_1(\varphi_1(u_0)) = \chi_1(u_1) - \chi_1(u'_0)$. Damit folgt $0 = \psi_2(\psi_1(\chi_0(u_0))) = \psi_2(\chi_1(u_1) - \chi_1(u'_0)) = \psi_2(\chi_1(u_1)) - \psi_2(\chi_1(u'_1))$, also $\psi_2(\chi_1(u_1)) = \psi_2(\chi_1(u'_1))$, so daß der Wert von $\chi_2(u_2)$ doch nicht von der Wahl des Urbilds von u_2 abhing.

Derartige Beweise nennt man übrigens “Diagrammjagden”.

Eine exakte Sequenz der Form $0 \to U \to V \to W \to 0$ heißt auch *kurze exakte Sequenz.*

Eine exakte Sequenz der Form $0 \to U \to V \xrightarrow{\varphi} W \to Z \to 0$ läßt sich zerlegen in zwei kurze exakte Sequenzen $0 \to U \to V \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Im} \varphi \to 0$, $0 \to \ker \varphi \to W \to Z \to 0$, wobei die Abbildung $\ker \varphi \to W$ einfach durch die identische Abbildung $w \to w$ gegeben ist. Entsprechendes gilt für längere exakte Sequenzen.

Ist $0 \to U \to V \to W \to 0$ eine kurze exakte Sequenz, so zeigt man leicht, daß $\dim W = \dim V - \dim U$ bzw. dim U – dim V + dim W = 0, woraus dann durch Induktion folgt, daß für eine exakte Sequenz $0 \to U_1 \to \ldots \to U_n \to 0$ die Formel $\sum_{i=1}^{n} (-1)^n \dim U_i = 0$ gilt.

Quotientenraum

Ist *V* ein *K*-Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum, so wurde der Quotientenraum *V/U* als Menge der Nebenklassen $\{x + U \mid x \in V\}$ erklärt und gezeigt, daß die Nebenklassenaddition $(x+U) + (y+U) := (x+y) + U$ zusammen mit der Multiplikation $\lambda(x+U) := (\lambda x) + U$ zu einer Vektorraumstruktur auf dem Quotientenraum führt.

Die Abbildung $V \xrightarrow{\pi} V/U$, $x \to x + U$ ist linear und offenbar surjektiv und heißt “kanonische Projektion.

Die Inklusion $U \subset V$ ergibt eine injektive lineare Abbildung $U \xrightarrow{i} V$ $x \to x$.

Insgesamt haben wir die exakte Sequenz $0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/U \to 0$.

Ergänzt man eine Basis $v_1, \ldots, v_m$ von *U* zu einer Basis $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ von *V*, so bilden $\pi(v_{m+1}) = v_{m+1} + U, \ldots, \pi(v_n) = v_n + U$ eine Basis von *V/U* .

Freier Vektorraum über einer Menge

Ist *M* eine Menge, so soll der *freie K-Vektorraum über M* $\mathcal{F}(M, K)$ gerade die Basis *M* besitzen. Ist *M n*-elementig, so wird $\mathcal{F}(M, K)$ *n*-dimensional. Ist *M* unendlich, so ist $\mathcal{F}(M, K)$ unendlich-dimensional.

Eine Möglichkeit, $\mathcal{F}(M, K)$ formal zu definieren, ist folgende :
$\mathcal{F}(M, K) := \{ f : M \to K \mid \{ m \in M \mid f(m) \neq 0 \} \text{ ist endlich} \}$.

Die Funktionen in diesem Raum kann man wie üblich addieren und mit einem Skalar multiplizieren: $\mathcal{F}(M,K)$ menge ist also in natürlicher Weise ein *K*-Vektorraum.

Wir identifizieren ein Element $m \in M$ mit einer Funktion aus $\mathcal{F}(M,K)$ durch die Abbildungsvorschrift $m(k) := \delta_{mk} = \begin{cases} 1, \text{falls}\, m=k \\ 0\, \text{sonst} \end{cases}$. Damit läßt sich *M* in natürlicher Weise als Teilmenge von $\mathcal{F}(M,K)$ auffassen.

Zu gegebenem $f \in \mathcal{F}(M,K)$ sei $M_f = \{m \in M \mid f(m) \neq 0\}$ die zugehörige endliche "Trägermenge von *f* ". Setzen wir $\lambda_m = f(m)$, so läßt sich schreiben: $f = \sum_{m \in M_f} \lambda_m m$.
Man sieht sofort, daß die $m \in M$, aufgefaßt als Elemente von $\mathcal{F}(M,K)$, eine Basis dieses Raums bilden.

Man sieht daher auch sofort, daß sich jede Abbildung $M \to V$ von *M* in einen *K*-Vektorraum eindeutig zu einer linearen Abbildung $\mathcal{F}(M,K) \to V$ fortsetzen läßt. Dies ist die wesentliche "universelle Eigenschaft" von $\mathcal{F}(M,K)$.

Tensorprodukt
Sind *V*,*W* Vektorräume über *K* so betrachten wir den freien Vektorraum über $V \times W$, also $\mathcal{F}(V \times W, K)$.

In $\mathcal{F}(V \times W, K)$ betrachte man jetzt die Teilmengen

$$S_1 = \{\lambda(v,w) - (\lambda v, w) \mid \lambda \in K, v \in V, w \in W\} \;,$$
$$S_2 = \{\lambda(v,w) - (v, \lambda w) \mid \lambda \in K, v \in V, w \in W\} \;,$$
$$S_3 = \{(u+v,w) - (u,w) - (v,w) \mid u,v \in V, w \in W\} \;,$$
$$S_4 = \{(u,v+w) - (u,w) - (u,v) \mid u \in V, v, w \in W\} \;,$$
$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

und bilde in $\mathcal{F}(V \times W, K)$ den von *S* erzeugten Unterraum < *S* >, d.h. die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus *S* . Anschließend definiere man $V \otimes W$ als den Quotientenraum $\mathcal{F}(V \times W, K) / \langle S \rangle$.

Wir haben also die exakte Sequenz $0 \to \langle S \rangle \to \mathcal{F}(V \times W, K) \xrightarrow{\pi} V \otimes W \to 0$, wobei π die kanonische Projektion auf den Quotientraum ist.

Für $v \in V, w \in W$ setze man noch $v \otimes w := \pi(v,w) = (v,w) + \langle S \rangle \in V \otimes W$.

Die Elemente von $V \otimes W$ haben keineswegs alle die Form $v \otimes w$; sie sind vielmehr aus endlich vielen Summanden dieser Form zusammengesetzt

Alle Eigenschaften des Tensorprodukts, beispielsweise die Rechenregel $(u+v)\otimes w = u\otimes w + v\otimes w$ sind jetzt in die Definition "eingebaut".

Es ist nämlich

$$(u+v)\otimes w = \pi(u+v, w) = \pi\big((u+v,w)-(u,w)-(v,w)\big)+\pi(u,w)+\pi(v,w) =$$
$$\pi(u,w)+\pi(v,w) = u\otimes w + v\otimes w$$

Die wesentliche Eigenschaft von $V\otimes W$ und der durch $(v,w)\to v\otimes w$ gegebenen bilinearen Abbildung $V\times W \xrightarrow{\pi} V\otimes W$, ist es, daß es für jede andere bilineare Abbildung $\Phi: V\times W\to U$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi: V\otimes W\to U$ gibt, so daß $\varphi(v\otimes w)=\Phi(v,w)$, i.a.W. $\varphi\circ\pi=\Phi$. Dies ist die sog. "universelle Eigenschaft des Tensorprodukts".

Noch einmal mit anderen Worten:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V\times W & \xrightarrow{\Phi} & U \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\varphi} & \\ V\otimes W & & \end{array}$$

ist kommutativ!

Zum Beweis der universellen Eigenschaft gehen wir aus von der Abbildung $\Phi: V\times W\to U$ und ihrer eindeutigen Fortsetzung zu einer linearen Abbildung $\mathcal{F}(V\times W, K)\to U$, die wir ebenfalls Φ nennen wollen. Die Situation können wir durch folgendes Diagramm beschreiben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & U & \xrightarrow{id} & U & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle\Phi} & & & & \\ <S> & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}(V\times W, K) & \xrightarrow{\pi} & V\otimes W & \to & 0 \end{array}$$

Daß die Abbildung $\Phi: V\times W\to U$ bilinear ist, bedeutet gerade, daß im obigen Diagramm $\Phi\circ i=0$! Dadurch läßt sich das Diagramm kommutativ ergänzen zu

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & U & \xrightarrow{id} & U & & \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\Phi} & & & & \\ <S> & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}(V\times W, K) & \xrightarrow{\pi} & V\otimes W & \to & 0 \end{array} \quad !$$

Nach unserem oben bewiesenen Lemma gibt es jetzt eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi: V\otimes W\to U$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & U & \xrightarrow{id} & U & & \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\Phi} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ <S> & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}(V\times W, K) & \xrightarrow{\pi} & V\otimes W & \to & 0 \end{array}$$

kommutativ macht.

Wir lesen ab: $\Phi(v,w)=\varphi(\pi(v,w))=\varphi(v\otimes w)$ und haben also die in der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts geforderte eindeutige Abbildung φ konstruiert!