

## Stoffzusammenfassung des 4. Semesters

Diese Stoffzusammenfassung orientiert sich im wesentlichen an Übungsblättern dieses Semesters. Wiederholen Sie anhand Ihrer Vorlesungsmitschriften und der Skripten auf der Vorlesungs-Webseite insbesondere auch die Definitionen der unten aufgeführten Begriffe.

### Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Lie Ableitung von Vektorfeldern, Lie Algebra, Lie-Algebren von Matrizen

Lie-Gruppen und ihre Lie-Algebren, Exponentialabbildung

Operation von Lie-Gruppen, Operation der  $SL_2(\mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene, der  $SU(1,1)$  auf dem Einheitskreis

Lorentz-Produkt und Lorentz-Gruppe

### Lineare Algebra II

Dualraum, Quotientenraum, exakte Sequenzen und kommutative Diagramme und exakte Sequenzen von Vektorräumen

Isomorphie zwischen einem Vektorraum und seinem Dualraum bei gegebener nicht-ausgearteter

Bilinearform, insbesondere bei einem Skalarprodukt

### Tensorrechnung

Tensorprodukt endlich-dimensionaler Vektorräume, Basis eines Tensorprodukt-Raums,

Tensoren als multilineare Abbildungen symmetrische und antisymmetrische Tensoren,

Skalarprodukt als Tensor, Kontraktion von Tensoren, Tensorprodukt linearer Abbildungen

Tensorfelder, Basisdarstellung, Pullback eines Tensorfelds vom Typ  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$

Konforme Äquivalenz von Metriken

Riemannsche Metrik als Tensorfeld vom Typ  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Riemannsche Metrik auf einer Sphäre (Polarkoordinaten)

Lie-Ableitung und kovariante Ableitung von Tensorfeldern, Christoffel-Symbole

### Laplace-Operator

Laplace-Operator im  $\mathbb{R}^n$  und auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (z.B. Sphäre)

## Übungsklausur zum Stoff des ersten Semesters (erster Teil)

1. Im  $\mathbb{R}^3$  seien die Vektorfelder  $X = (z+y)\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $Y = z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$  gegeben.

Man berechne  $[X, Y]$

2. Im  $\mathbb{R}^2$  betrachte man die symmetrische Bilinearform  $g(x, y) = x^1 y^1 - x^2 y^2$  und die Lie-Gruppe derjenigen  $2 \times 2$ -Matrizen, für die gilt:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2: g(x, y) = g(Ax, Ay)$ .

Wie sieht die zugehörige Lie-Algebra aus?

3. Sei  $A$  eine antisymmetrische  $3 \times 3$ -Matrix. Begründen Sie, warum  $\exp(A) \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ .

4. Ist  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ , so ist durch  $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  eine bijektive holomorphe

Abbildung der oberen Halbebene  $H \subset \mathbb{C}$  in sich gegeben. Beschreiben Sie zu jedem  $z_0 \in H$  die Untergruppe  $\text{Fix}_{z_0} \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$  derjenigen Matrizen  $A$ , für die gilt  $\varphi_A(z_0) = z_0$ .

5. Sei  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorräume. Warum ist  $\dim U - \dim V + \dim W = 0$ ?

6. Sei  $V := \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  und  $S: V \rightarrow V$  gegeben durch  $S(x \otimes y) = y \otimes x$ . Ein Tensor  $v \in V$  heißt symmetrisch, wenn  $S(v) = v$  und antisymmetrisch, wenn  $S(v) = -v$ . Man finde eine Basis der symmetrischen und der antisymmetrischen Tensoren in  $V$ .

7. Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = z + z^2$ . Man fasse  $f$  als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf, betrachte die Riemannsche Metrik  $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$  und berechne den Pullback  $f^*g$ . Ist  $f^*g$  selbst eine Riemannsche Metrik?

8. Sei  $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$  die gewöhnliche Riemannsche Metrik im  $\mathbb{R}^3$  und  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch  $f(x) = Ax + b$ , wobei  $A \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^3$ . Man zeige:  $f^*g = g$ .

9. Auf dem Einheitskreis  $U \subset \mathbb{C}$  ist durch  $g = \left( \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} \right) (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$  eine

Riemannsche Metrik gegeben. Man berechne den Laplace Operator  $\Delta f = *d*d f$  bezüglich dieser Metrik für eine auf  $U$  definierte hinreichend oft differenzierbare Funktion  $f$ .

10. Auf  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  betrachte man die Funktion  $f(x) = \log \|x\|$ . Ist  $f$  harmonisch?

**Wird demnächst weiter ergänzt.**