

Der Laplace Operator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Ausgangspunkt ist eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definierte hinreichend oft differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hatten wir folgenden Grenzwert betrachtet:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f(x_0 + te_i) + f(x_0 + t(-e_i))}{2n} - f(x_0)}{t^2}.$$

Dabei wird offenbar die Abweichung des Funktionswerts $f(x_0)$ vom Durchschnitt der Funktionswerte nahe bei x_0 betrachtet. Diese Abweichung geht quadratisch gegen Null, weshalb zur Erreichung eines aussagefähigen Grenzwerts durch t^2 zu teilen ist. Nach Umformung und zweimaliger Anwendung der l'Hopital'schen Regel erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_0 + te_i) + f(x_0 + t(-e_i)) - 2f(x_0))}{2nt^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n (f'(x_0 + te_i) - f'(x_0 + t(-e_i)))}{4nt} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n (f''(x_0 + te_i) + f''(x_0 + t(-e_i)))}{4n} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) = \frac{1}{2n} \Delta f(x_0) \end{aligned}$$

Also kann man sagen:

Der Laplace-Operator mißt in jedem Punkt die Abweichung des Funktionswerts vom Durchschnitt der Funktionswerte in der Umgebung.

Es ist dabei fast egal, in welcher Weise die Durchschnittsbildung erfolgt.

Oben betrachteten wir ein Punktgitter mit Mittelpunkt x_0 und Punktabstand ϵ , welches parallel zu den Koordinatenachsen ausgelegt ist, und berechneten den Durchschnitt der Funktionswerte auf den Nachbargitterpunkten von x_0 .

Genausogut könnte man den Durchschnitt der Funktionswerte von f auf der Sphäre $S_\epsilon(x_0)$ mit Radius ϵ um x_0 hernehmen, oder den Durchschnitt der Funktionswerte f auf der gesamten Kugel $U_\epsilon(x_0)$. Die Rechnungen sind dann natürlich komplizierter, führen aber in jedem Fall zum Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator ergibt sich aber auch auf folgende Weise.

Wir erinnern uns an den Operator $*$: $\mathcal{E}^k(U) \rightarrow \mathcal{E}^{n-k}(U)$, der folgendermaßen entsteht:

Ist $\sigma = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathfrak{S}_n$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n-k$ eine Permutation

so wird definiert $*d x^{i_1} \wedge \dots \wedge d x^{i_k} := \epsilon_\sigma d x^{j_1} \wedge \dots \wedge d x^{j_{n-k}}$. Dies hat zur Folge, daß

$$d x^{i_1} \wedge \dots \wedge d x^{i_k} \wedge *(d x^{i_1} \wedge \dots \wedge d x^{i_k}) = d x^1 \wedge \dots \wedge d x^n. \text{ In diese Definition werden die Grenzfälle } *1 = d x^1 \wedge \dots \wedge d x^n \text{ (} k=0 \text{) und } *d x^1 \wedge \dots \wedge d x^n = 1 \text{ (} k=n \text{) eingeschlossen.}$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{E}^0(U)$ ist daher

$$\begin{aligned}
*d*d f &= *d* \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = *d \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = \\
&= * \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} = \Delta f
\end{aligned}$$

Es erweist sich aus Symmetriegründen als vernünftig, den Laplace-Operator auf $\mathcal{E}^k(U)$ durch $\Delta := *d*d + d*d*$ zu definieren, was für $k=0$ nichts ändert, da ja $d*d^*=0$. Für $k=n$ ist dagegen $*d*d = 0$, und der „Partner“ $d*d*$ erweist sich als sinnvoll.

Auf einer n -dimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M kann man in natürlicher Weise dieselben Durchschnittsbetrachtungen anstellen und einen Laplace-Operator definieren. Um ihn konkret auszurechnen, ist aber der Zugang über den $*$ -Operator am einfachsten.

Dazu brauchen wir in $\mathcal{E}^1(U)$ ein Orthonormalsystem von 1-Formen, welches den dx^i im \mathbb{R}^n entspricht. Ausgangspunkt der Konstruktion sind Koordinatenfunktionen $x^1, \dots, x^n \in \mathcal{E}(U)$ und die Riemannsche Metrik auf M , die auf U bezüglich der lokalen Koordinaten die Gestalt

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \text{ besitzt. Durch } g \text{ wird dann auch das Tensorfeld } g^{-1} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ definiert,}$$

wobei für jedes $x \in U$ (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix ist. Für die gesuchten 1-Formen

$$\alpha^i = \alpha^i_j dx^j \text{ soll also gelten: } \delta^{ij} = g^{-1}(\alpha^i, \alpha^j) \text{ und in Koordinaten bedeutet dies, daß}$$

$\delta^{ij} = g^{kl} \alpha^i_k \alpha^j_l$. Wir denken uns die α^i so angeordnet, daß die Volumenform $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$ gleich richtig orientiert ist. Konstruiert wird eine derartige „Orthonormalbasis von 1-Formen“ i.a. über den Gram-Schmidt-Prozeß. Im folgenden Beispiel kann man aber die α^i erraten:

Seien $M = S^2$, φ, θ die Kugelkoordinaten auf $U = S^2 - \text{Nullmeridian}$. Wir hatten bereits ausgerechnet, daß für das durch den umgebenden \mathbb{R}^3 induzierte metrische Tensorfeld gilt:

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = \cos^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi + d\theta \otimes d\theta. \text{ Damit ist } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man sieht sofort, daß die Gleichungen $\delta^{ij} = g^{kl} \alpha^i_k \alpha^j_l$ für

$\alpha^1 = \cos \theta d\varphi$ und $\alpha^2 = d\theta$ erfüllt sind und α^1, α^2 ein orientiertes Orthonormalsystem von 1-Formen auf U bilden. Jetzt ergibt sich

$$df = \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \alpha^1 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \alpha^2$$

$$*df = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial \theta} \alpha^1 = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\theta - \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} d\varphi$$

$$d*d f = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} d\varphi \wedge d\theta - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} d\varphi \wedge d\theta + \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} d\varphi \wedge d\theta =$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \tan \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \alpha^1 \wedge \alpha^2$$

$$\Delta f := *d*d f = \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \tan \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

Diese Definition von Δ hängt überhaupt nicht vom gewählten Koordinatensystem ab. Man hätte also mit einer Rechnung bezüglich der durch die stereographische Projektion gegebenen Koordinaten oder mit einer anderen orientierten Orthonormalbasis von 1-Formen dasselbe Ergebnis erhalten.

Als Übungsaufgabe könnte man jetzt also den Laplace-Operator bezüglich der durch die stereographische Projektion gegebenen Koordinaten berechnen, sodann bezüglich geeigneter Koordinaten auf der S^3 , sowie auf der „hyperbolischen Mannigfaltigkeit“, die durch den offenen Einheitskreis im \mathbb{R}^2 gegeben ist mit der Metrik $\frac{1}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$, bzw. durch die obere Halbebene und die Metrik $\frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$.