

Mathematik IV für Physiker und Elektrotechniker SS05

Aufgabenblatt 10

<i>Name(n)</i>	<i>Tutor</i>	<i>Datum</i>

Nachdem die Qualifikation für die Klausurteilnahme auf der Basis der Übungsteilnahme und der erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabenblätter 1-9 am 23.6. festzustellen ist, besitzen die folgenden Aufgaben nur noch privaten Übungscharakter.

Einerseits geht es um die Vorbereitung der Klausur am 14.7. bzw. am 29.9. (Eine Nachklausur wird es im Januar 2006 geben.) Schauen Sie sich dazu zunächst unter "Lehrveranstaltungen früherer Semester" die **Stoffsammlung für das dritte Semester** sowie die **Testklausur** und die **Prüfungsklausur** der Systems-Engineers an. Die entsprechenden Inhalte werden dann sowohl in der Vorlesung wie in den Tutorien noch einmal besprochen, es schließt sich auf dem Übungsblatt 11 der kommenden Woche eine entsprechende Zusammenfassung und eine Übungsklausur für das vierte Semester an.

Gleichzeitig wird im folgenden der bisherige Stoff abgerundet und ergänzt:

Kovariante Ableitung

Gegeben sei eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M . Mit $\mathfrak{X}(M)$ wurde der Raum der differenzierbaren Vektorfelder auf M bezeichnet. Wir wissen inzwischen, wie Vektorfelder als Tensorfelder vom Typ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu interpretieren sind.

Ist zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

$$\begin{aligned} \forall f \in C^\infty(M), Y \in \mathfrak{X}(M): \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y \\ \forall f \in C^\infty(M), Y \in \mathfrak{X}(M): \nabla_X fY &= X(f)Y + f \nabla_X Y \end{aligned}$$

so spricht man von einer *kovarianten Ableitung*.

Die zweite Formel wird schöner, wenn man $\nabla_X f := X(f)$ setzt, den Operator ∇_X also auf diese Weise auch für Funktionen bzw. für Tensorfelder vom Typ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ definiert.

Sind auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$ Koordinatenfunktionen $x^1, \dots, x^n \in C^\infty(U)$ gegeben, so erhält man $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, wobei man die sich ergebenden Koeffizientenfunktionen *Christoffel-Symbole* nennt.

Eine kovariante Ableitung heißt symmetrisch, wenn

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M): \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad .$$

Man erweitert die kovariante Ableitung auf beliebige Tensorfelder, indem man bezüglich Tensorprodukten und Kontraktionen die Produktregel anwendet, also z.B. für Vektorfelder

$$Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \text{ ansetzt: } \nabla_X (Y \otimes Z) := (\nabla_X Y) \otimes Z + Y \otimes \nabla_X Z \quad , \text{ oder für 1-Formen } \omega \in \mathcal{E}^1(M)$$

und Vektorfelder $Y \in \mathfrak{X}(M)$ das Kontraktionsprodukt $\langle \omega, Y \rangle = \omega(Y) \in C^\infty(M)$ benutzt, um

$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$ zu schreiben, wodurch der erste Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung erst definiert wird. Entsprechend würde man für das Produkt zweier 1-Formen $\omega, \eta \in \mathcal{E}^1(M)$ ansetzen: $\nabla_X (\omega \otimes \eta) := (\nabla_X \omega) \otimes \eta + \omega \otimes \nabla_X \eta \quad , \text{ etc.}$

Ist auf M eine Riemannsche Metrik gegeben, also ein Tensorfeld $g \in \mathcal{T}_0^2(M)$, bei dem für jedes

$$x \in M \quad g(x) \in T_x^* M \otimes T_x^* M \text{ ein Skalarprodukt auf } T_x M \text{ ist, so heißt eine kovariante}$$

Ableitung *verträglich mit g* , wenn für alle $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $\nabla_X g = 0$.

Es stellt sich heraus, daß es zu einer gegebenen Riemannschen Metrik genau eine symmetrische, mit der Metrik verträgliche kovariante Ableitung gibt:

In diesem Zusammenhang folgende Aufgaben:

Aufgabe 1

Gegeben sei eine kovariante Ableitung auf einer Mannigfaltigkeit M .

Zeigen Sie: Ist die kovariante Ableitung symmetrisch, so folgt, daß dann auf jeder Koordinatenumgebung $U \subset M$ mit Koordinatenfunktionen $x^1, \dots, x^n \in C^\infty(U)$ für die Christoffelsymbole gilt:

$$\forall 1 \leq i, j, k \leq n: \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad .$$

Aufgabe 2

Sei zusätzlich eine Riemannsche Metrik g auf M gegeben, und die kovariante Ableitung sei symmetrisch und mit g verträglich. Auf der in Aufg. 1 gegebenen Koordinatenumgebung ist dann

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad . \text{ Rechnen Sie für die Koordinatenvektorfelder } \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ die kovariante Ableitung}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g \text{ aus (dazu müssen Sie offenbar als Zwischenergebnis } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j \text{ berechnen) und}$$

schließen Sie aus der Verträglichkeitsgleichung $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g = 0$ daß $\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$,

$$\text{wobei wiederum } \Gamma_{kij} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l \quad .$$

Diese Aufgabenserie wird mit konkreten Rechnungen auf konkreten riemannschen Mannigfaltigkeiten fortgesetzt.