Mathematik IV für Physiker und Elektrotechniker SS05 **Aufgabenblatt 8**		
Name(n)	***Tutor***	***Datum***

Aufgabe 1

Zu einem *K*-Vektorraums *V* definiert man bekanntlich den Dualraum V^* durch $V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{\varphi : V \to K \mid \varphi \text{ linear}\}$. Ist $V \xrightarrow{\Phi} W$ linear, so definiert man die duale lineare Abbildung $W^* \xrightarrow{\Phi^*} V^*$ durch $\mu \to (v \to \mu(\Phi(v)))$, d.h. $(\Phi^*(\mu))(v) := \mu(\Phi(v))$.

Man zeige: Ist die Sequenz $U \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} W$ exakt, so auch die duale Sequenz $W^* \xrightarrow{\Psi^*} V^* \xrightarrow{\Phi^*} V^*$.

Aufgabe 2

Sind $U \xrightarrow{\varphi} W$ und $V \xrightarrow{\psi} Z$ lineare Abbildungen, so ist durch $(u, v) \to \varphi(u) \otimes \psi(v)$ eine bilineare Abbildung $U \times V \to W \otimes Z$ gegeben. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts beschert uns eine zugehörige Abbildung $U \otimes V \to W \otimes Z$, $u \otimes v \to \phi(u) \otimes \psi(v)$, welche man üblicherweise $\varphi \otimes \psi$ nennt.

a) Sind 2 lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3$ durch die Matrizen *A*,*B* gegeben, so bestimmen sie die Matrixdarstellung des Tensorprodukts $\varphi \otimes \psi$! (Offenbar eine 6x6-Matrix).

b) Ist $U \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} W$ exakt, so betrachte man die Sequenz $U \otimes Z \xrightarrow{\Phi \otimes id} V \otimes Z \xrightarrow{\Psi \otimes id} W \otimes Z$ und zeige, daß sie ebenfalls exakt ist.

Aufgabe 3 (Sonderaufgabe)

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ so beschreibt $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$
das Tensorprodukt der zu *A*,*B* gehörigen linearen Abbildungen (vgl. 2b).

Man stelle fest, unter welchen Bedingungen eine beliebige 4x4-Matrix *C* von der Form $A \otimes B$ ist, d.h. man finde Gleichungen, die die Koeffizienten von *C* dazu erfüllen müssen.

Aufgabe 4

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und φ auf U holomorph. Wenn man φ als reelle Abbildung auffaßt, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Ist $g = \mathrm{d}\,x \otimes \mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y \otimes \mathrm{d}\,y$ die übliche Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^2$, so zeige man, daß $\varphi^* g = \lambda\, g$ mit $\lambda \geqslant 0$.

(Vgl. Blatt 5 Aufg. 3, Blatt 6 Aufg. 1.
Geometrisch bedeutet dies, daß holomorphe Abbildungen winkeltreu sind.
In späteren Übungen werden wir flächentreue Abbildungen untersuchen.)