

Mathematik IV für Physiker und Elektrotechniker SS05

Aufgabenblatt 6

<i>Name(n)</i>	<i>Tutor</i>	<i>Datum</i>

Aufgabe 1

Zwei metrische Tensorfelder g_1, g_2 auf der Mannigfaltigkeit M heißen *konform äquivalent*, wenn es eine positive Funktion $f \in C^\infty(M)$ gibt mit $g_2 = f g_1$. Offenbar bedeutet dies, daß Winkel und Längenverhältnisse in den Tangentialräumen für beide Metriken gleich sind, während die Längen gegeneinander um den durch f in jedem Punkt gegebenen Faktor verzerrt sind.

Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$. $\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ ist offenbar die "Spiegelung an der

Einheitskugel". Sei nun $g_1 = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i (= \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j)$ die übliche Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$ und $g_2 = \varphi^* g_1$. Zeigen Sie, daß g_1, g_2 konform äquivalent sind!

Lineare Algebra

Aufgabe 2

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K , $U \subset V$ ein Unterraum, v_1, \dots, v_n eine Basis von V , wobei die ersten k dieser Basisvektoren eine Basis von U bilden. Zeigen Sie: $v_{k+1} + U, \dots, v_n + U$ bilden eine Basis des Quotientenraums V/U .

Zur Definition des Tensorprodukts

Ist M eine Menge, so besitzt der *freie K -Vektorraum über M* $\mathcal{F}(M, K)$ gerade die Basis M . Ist M n -elementig, so wird $\mathcal{F}(M, K)$ n -dimensional. Ist M unendlich, so ist $\mathcal{F}(M, K)$ unendlich-dimensional. Eine Möglichkeit, $\mathcal{F}(M, K)$ formal zu definieren, ist folgende:

$\mathcal{F}(M, K) := \left\{ f: M \rightarrow K \mid \{m \in M \mid f(m) \neq 0\} \text{ ist endlich} \right\}$. Diese Funktionenmenge ist in natürlicher Weise ein K -Vektorraum, und wir identifizieren ein Element $m \in M$ mit einer Funktion aus $\mathcal{F}(M, K)$ durch die Abbildungsvorschrift $m(k) := \delta_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } m=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Zu gegebenem $f \in \mathcal{F}(M, K)$ sei $M_f = \{m \in M \mid f(m) \neq 0\}$ die zugehörige endliche "Trägermenge". Setzen wir noch $\lambda_m = f(m)$, so haben wir $f = \sum_{m \in M_f} \lambda_m m$, und man sieht sofort, daß die $m \in M$ eine Basis von $\mathcal{F}(M, K)$ bilden.

Sind V, W Vektorräume über K so betrachten wir zunächst den freien Vektorraum über $V \times W$, also $\mathcal{F}(V \times W, K)$. Sind z.B. V, W Vektorräume über \mathbb{R} , wobei mindesten einer von ihnen mindestens eindimensional ist, so ist $V \times W$ unendlich und damit $\mathcal{F}(V \times W, K)$ unendlichdimensional; dies wird in den meisten unserer Anwendungsfälle so sein.

In $\mathcal{F}(V \times W, K)$ betrachte man jetzt die Teilmengen

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ \lambda(v, w) - (\lambda v, w) \mid \lambda \in K, v \in V, w \in W \}, \\ S_2 &= \{ \lambda(v, w) - (v, \lambda w) \mid \lambda \in K, v \in V, w \in W \}, \\ S_3 &= \{ (u+v, w) - (u, w) - (v, w) \mid u, v \in V, w \in W \}, \\ S_4 &= \{ (u, v+w) - (u, w) - (u, v) \mid u \in V, v, w \in W \}, \\ S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \end{aligned}$$

und bilde in $\mathcal{F}(V \times W, K)$ den von S erzeugten Unterraum $\langle S \rangle$, d.h. die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus S . Jetzt definiere man $V \otimes W$ als den Quotientenraum $\mathcal{F}(V \times W, K) / \langle S \rangle$.

Für $v \in V, w \in W$ setzt man noch $v \otimes w := (v, w) + \langle S \rangle \in V \otimes W$.

Die Elemente von $V \otimes W$ haben keineswegs alle die Form $v \otimes w$; sie sind vielmehr aus endlich vielen Summanden dieser Form zusammengesetzt, s. Aufg. 3.

Alle Eigenschaften des Tensorprodukts, beispielsweise die Rechenregel

$$(u+v) \otimes w = u \otimes w + v \otimes w$$

sind jetzt in die Definition "eingebaut".

Aufgabe 3

Man zeige: Ist v_1, \dots, v_n eine Basis von V , w_1, \dots, w_m eine Basis von W , so ist

$$v_i \otimes w_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

eine Basis von $V \otimes W$.

$V \otimes W$ ist also mn -dimensional

Aufgabe 4

Sei $B(V^* \times W^*, K) := \{ \varphi : V^* \times W^* \rightarrow K \mid \varphi \text{ bilinear} \}$ der Vektorraum der K -linearen Abbildungen.

Ist $(v, w) \in V \times W$, so wird durch $\varphi_{(v, w)}(\lambda, \mu) := \lambda(v)\mu(w)$ eine bilineare Abbildung $\varphi_{(v, w)}$ aus $B(V^* \times W^*, K)$ definiert.

Zeigen Sie: Ist $v_1 \otimes w_1 + \dots + v_k \otimes w_k = v'_1 \otimes w'_1 + \dots + v'_l \otimes w'_l$ so auch

$$\varphi_{(v_1, w_1)} + \dots + \varphi_{(v_k, w_k)} = \varphi_{(v'_1, w'_1)} + \dots + \varphi_{(v'_l, w'_l)}$$

(Vorschlag: Nehmen Sie $k \leq l$ an, und führen Sie einen Induktionsbeweis über l .)

Daraus folgt sofort eine kanonische Isomorphie zwischen $V \otimes W$ und $B(V^* \times W^*, K)$. Man hätte das Tensorprodukt also auch über $B(V^* \times W^*, K)$ definieren können.

Wichtig ist letztlich nur, den Raum $V \otimes W$ und die bilineare Abbildung $V \times W \rightarrow V \otimes W$, $(v, w) \rightarrow v \otimes w$ so zu definieren, daß es für jede andere bilineare Abbildung $\Phi: V \times W \rightarrow U$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi: V \otimes W \rightarrow U$ gibt, so daß $\varphi(v \otimes w) = \Phi(v, w)$. (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts).

Jede mögliche Definitionsvariante für das Tensorprodukt ist technisch umständlich, während das Objekt selbst sehr natürlich ist, wie man z.B. an der Aussage von Aufg. 3 sieht. Man vergleiche dies mit der komplizierten Definition/Konstruktion der ganzen Zahlen, ausgehend von einer Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dabei ist die "Idee" der ganzen Zahlen doch ganz einfach!