Mathematik IV für Physiker und Elektrotechniker SS05
Aufgabenblatt 5

Name(n)	Tutor	Datum

Aufgabe 1

Das kanonische Skalarprodukt auf den Tangentialräumen $T_x\mathbb{R}^3$ läßt sich als Tensorfeld schreiben: $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ mit $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Ein Tensorfeld, welches in jedem Punkt ein Skalarprodukt darstellt, nennt man auch ein *metrisches Tensorfeld* oder kurz *Metriktensor*.

Die “Kugelkoordinaten” r, θ, φ sind differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Stellen Sie den Metriktensor g bezüglich dieser Koordinaten dar, d.h. als Linearkombination von Tensorprodukten $\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}\theta$, etc.

Aufgabe 2

Man betrachte den offenen Einheitskreis $K \subset \mathbb{R}^2$ und definiere dort den Metriktensor $g = \left(\frac{1}{1-(x^2+y^2)}\right)^2 \left(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y\right)$. Für jede Matrix $A \in \mathrm{SU}(1,1)$, $A = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1$ ist bekanntlich die Abbildung $z \to z' = \varphi_A(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}$ bijektiv (und holomorph) auf *K*.

a) Man schreibe $a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2, z = x + iy, z' = x' + iy'$ und $\varphi_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ mit reellen Variablen.

b) Man zeige, daß auch bezüglich der Koordinaten x', y' auf *K* gilt:
$$g = \left(\frac{1}{1-(x'^2+y'^2)}\right)^2 \left(\mathrm{d}x' \otimes \mathrm{d}x' + \mathrm{d}y' \otimes \mathrm{d}y'\right)$$

Aufgabe 3

a) Man zeige, daß die Abbildung $\Phi(z)=\frac{-z+i}{z+i}$ die obere Halbebene bijektiv auf den offenen Einheitskreis abbildet.

b) Man drücke auch diese Abbildung mittels reeller Variablen aus, so daß man $\Phi=\begin{pmatrix}\Phi^1\\ \Phi^2\end{pmatrix}$ erhält, wobei Φ^1, Φ^2 Funktionen zweier reeller Variablen sind, und berechne

$$\Phi^* g=\left(\frac{1}{1-\left((\Phi^1)^2+(\Phi^2)^2\right)}\right)^2\left(\mathrm{d}\,\Phi^1\otimes\mathrm{d}\,\Phi^1+\mathrm{d}\,\Phi^2\otimes\mathrm{d}\,\Phi^2\right) \quad .$$

(Dies ist dann offenbar ein Metriktensor auf der oberen Halbebene.)