Übungsklausur Mathematik III

Dieses Dokument soll insbesondere den Studierenden des Studiengangs Bachelor Systems Engineering zur Vorbereitung auf die für diesen Studiengang vorgeschriebene Prüfungsklausur Mathematik III dienen, aber natürlich sind auch die Teilnehmer der anderen Studiengänge eingeladen, ihren Wissenstand zu überprüfen.

Wie schon in den vergangenen Semestern sollten Sie sich bezüglich der zu beherrschenden Inhalte an den Aufgabenzetteln dieses Semesters orientieren, dem dazu auf der Vorlesungs-Webseite veröffentlichten Material und natürlich Ihren Vorlesungsmitschriften. Und wie früher berücksichtigen Sie, daß Umfang und Schwierigkeit einer Klausuraufgabe gegenüber den Aufgabenzetteln sehr reduziert sind.

Stoffsammlung

Lassen Sie sich von der Menge dieses Stoffs nicht schrecken. Die Klausuraufgaben werden diesbezüglich keinesfalls über das bereits Geübte hinausgehen.

Vektorräume von Funktionen, $L^2-\text{Norm}$ für Funktionen, Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren

Maß- und Integrationstheorie, Mehrfachintegrale

Fouriertransformation und diskrete Fouriertransformation

Polar- und Kugelkoordinaten, Integral-Transformationsformel, Pullback einer Differentialform

Parametrisierung k-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, Integral einer k-Form auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$

Volumenform einer k-dimensionalen orientierbaren Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$

.Stokessche Integralformel $\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\,\omega$, auch in ihrer 2- und 3- dimensionalen Spielart als Greensche Integralformel, Gaußsche Integralformel.

Komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, komplexe Kurvenintegrale, Cauchy Integralsatz, Cauchy Integralformel

Aufgaben zu obigem Stoff (wird noch fortgesetzt)

1. Betrachten Sie die Polynome $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x+5$ als Elemente des Vektorraum c der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall [0,1] .

a) Zeigen Sie, daß f_1, f_2 linear unabhängig sind.

b) Auf C[0,1] ist durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ ein Skalarprodukt definiert. Finden sie zwei orthonormale Funktionen g_1, g_2, die denselben Teilraum von C[0,1] aufspannen wie f_1, f_2, d.h. wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf f_1, f_2 an.

2. Sei **A** eine σ - Algebra auf der Menge X und μ ein Maß auf **A** .
Wieso gilt $\mu(U) \leqslant \mu(V)$, wenn $U, V \in \boldsymbol{A},\ U \subset V$?

3. Betrachten Sie das Lebesgue Maß λ im $\mathbb{R}^n$. Wir wissen, daß alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar sind, also zur Lebesgue'schen σ - Algebra gehören.

Warum sind dann auch die einpunktigen Mengen meßbar?
Warum sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eine lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$?
Welchen Wert hat $\lambda(\mathbb{Q})$?

4. Betrachten Sie die Funktionenfolge $\chi_n := \chi_{[n,n+1]}$. Berechnen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ $\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(x)$ und $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_n \,\mathrm{d}\lambda$. Welche Bedingung des Satzes von der beschränkten Konvergenz ist verletzt, so daß diese Werte nicht gleich sind.

5. Berechnen Sie für das Rechteck $R = [2,3] \times [3,4]$ das Integral $\int_R \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

6. Wie sind die Fourierkoeffizienten $c_n, n \in \mathbb{Z}$ einer Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert?
Wie die Fourierreihe einer solchen Funktion?
Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $\sin(x)$!

7. Wie lautet die Formel für die diskrete Fouriertransformation einer komplexen Zahlenreihe $a_0, \ldots, a_{n-1}$? Wie die Formel für die inverse Transformation?

Berechnen Sie für n=3 die diskrete Fouriertransformation der Werte $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ und machen Sie als Probe auch deren inverse Transformation.

8. Sei K der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie mittels Transformation auf Polarkoordinaten das Integral $\int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

9. Berechnen Sie für die im $\mathbb{R}^4$ gegebene 2-Form $\omega = (x^2 + w)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ die 3 Form $\mathrm{d}\omega$ und für die durch $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \phi(u,v) = (u, v, u+v, u-v)$ parametrisierte Fläche den Pullback $\phi^* \omega$

10. Sei durch das Funktionentripel $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ ein diffenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Definieren Sie die Operationen rot(X), div(X) mit Hilfe der äußeren Ableitung **d** für Differentialformen.

11. Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ die Parametrisierung eines Paraboloiden $P \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für die Volumenform ω von P den Pullback $\Phi^* \omega$. (Hinweis: es gibt dazu eine Formel, siehe Blatt 11)

12. Sei $\alpha = 3x^2 y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y$ eine 1-Form im $\mathbb{R}^3$ und $\omega = \mathrm{d}\alpha$. Begründen Sie, warum das Integral $\int_{S^2} \omega$ auf der Einheitssphäre Null ist.

13. Betrachten Sie die 1-Form $\alpha = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ im $\mathbb{R}^2$ und die Punkte $z_0 = (0{,}0),\ z_1 = (2{,}1) \in \mathbb{R}^2$, außerdem sei γ ein Weg, der diese Punkte verbindet. Warum ist das Kurvenintegral $\int_\gamma \alpha$ .für alle solche Wege gleich? Berechnen Sie es!

14. Wie sieht die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = z$ im Punkt $z_0 = 1 + i$ aus?
Wie die der Funktionen $f(z) = z^3, \exp(z), \log(z)$?

15. Besitzt die komplex-differenzierbare Funktion $f(z)$ imGebiet G eine Stammfunktion F, d.h. gilt in G $F' = \frac{\partial F}{\partial z} = f$, so gilt für jeden Weg γ, der innerhalb G die Punkte $z_0, z_1 \in G$ verbindet, die Formel $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$. Überprüfen Sie diese Gleichung durch explizites Ausrechnen beider Seiten für: $f(z) = z^3,\ z_0 = 2,\ z_1 = 1 + i,\ G = \mathbb{R}^2,\ \gamma$ die gerade Strecke zwischen z_0, z_1.

16. Wie finden Sie mit Hilfe der Cauchy-Integralformel sofort den Wert des komplexe Kurvenintegrals $\int_\gamma \frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$, wenn γ den Rand einer Ellipse beschreibt, in deren Innerem der Punkt $z_0 = 3$ liegt.

17. Warum ist die Funktion $f(z) = z|z| = z^2 \bar{z}$ reell, aber nicht komplex differenzierbar?
Berechnen Sie $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$.