Prüfungsklausur Mathematik III, WS 2004/2005, 04.02.2005
Studiengang Bachelor Systems Engineering, Universität Bremen

Name	
Matrikelnummer	

1a	b	2a	b	3	4a	b	5	6	7	8	9	10a	b	11a	b	c	Σ
1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	21

Aufgabe 1

1. Betrachten Sie die Polynome $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2$ als Elemente des Vektorraums $C[0,1]$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall [0,1] .

a) Zeigen Sie, daß f_1, f_2 linear unabhängig in $C[0,1]$ sind.

b) Auf $C[0,1]$ ist durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ ein Skalarprodukt definiert.

Finden sie zwei orthonormale Funktionen g_1, g_2 , die denselben Teilraum von $C[0,1]$ aufspannen wie f_1, f_2 , d.h. wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf f_1, f_2 an.

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{M}$ eine σ - Algebra auf der Menge X und μ ein Maß auf $\mathfrak{M}$.

a) Wir wissen, daß $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Wie folgt die Aussage, daß die leere Menge das Maß Null besitzt, aus der $\sigma-$Additivität ?

b) Seien $U, V \in \mathfrak{M}$. Begründen Sie, warum $\mu(U\cup V) \leqslant \mu(U)+\mu(V)$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie für das Rechteck $R=[0,1]\times[2,5]$ das Integral $\int_R \exp(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_n,\ n\in\mathbb{Z}$ der Funktion $f(x)=\cos(x)$.

b) Gegeben seien die Werte $a_0=1, a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=5$. Berechnen Sie den Koeffizienten b_3 der diskreten Fouriertransformation von a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 .

Aufgabe 5

Sei K der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie mittels Transformation auf Polarkoordinaten das Integral $\int_K \sqrt{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die im $\mathbb{R}^3$ gegebene 2-Form $\omega=(x^2+z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ a) die 3 Form $\mathrm{d}\omega$ und b) für die durch $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \phi(u,v)=(1,u+v,u-v)$ parametrisierte Fläche den Pullback $\phi^*\omega$.

Aufgabe 7

Sei $\Phi:]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}^3$, $\Phi(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\sin\varphi\cos\theta,\sin\theta)$ die bekannte Mercator-Parametrisierung der Einheitssphäre $S^2\subset\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für die Volumenform ω der S^2 den Pullback $\Phi^*\omega$.

Aufgabe 8

Betrachten Sie die Halbsphäre $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle|\ x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0\right\}$, sowie die 1-Form $\alpha=y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$ und die 2-Form $\omega=\mathrm{d}\alpha=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$. Benutzen Sie den Stokesschen Satz bzw. die Stokessche Integralformel, um das Integral $\int_H\omega$ auszurechnen.

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z)=\frac{1}{z}$ im Punkt $z_0=i$.

Aufgabe 10

Betrachten Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma \frac{z^2}{z-4i}\,\mathrm{d}z$.

a) Warum können Sie die Cauchy-Integralformel zur Berechnung des obigen Integrals anwenden, wenn γ den Rand eines Kreises mit Radius 5 um den Nullpunkt von $\mathbb{C}$ beschreibt? Welches ist der Wert des Integrals?

b) Finden Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes den Wert des obigen Integrals, wenn γ den Rand eines Kreises mit Radius 1 um den Nullpunkt von $\mathbb{C}$ beschreibt.Begründen Sie die Anwendbarkeit des Satzes.

Aufgabe 11

Berechnen Sie für die Funktion $f(z)=z^2+\overline{z}$

a) $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$.

b) $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$

c) Ist f komplex differenzierbar? (Begründung!)