

Mittelwertsätze der Differentialrechnung und Anwendungen

Zunächst eine kleinere technische Erweiterung des Begriffs der Differenzierbarkeit:
Man muß bei jedem Punkt, in dem man eine Abbildung auf Differenzierbarkeit überprüft, Funktionswerte auf einer kleinen offenen Umgebung zur Verfügung haben, daher haben wir von vornherein differenzierbare Abbildungen nur auf offenen Mengen erklärt.

Definition (Differenzierbarkeit auf beliebigen Mengen):

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, so nennen wir f differenzierbar, wenn es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, die M umfasst und auf die sich f differenzierbar fortsetzen lässt.

Am Anfang steht Mittelwertsatzfamilie steht der Satz von Rolle:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar (also ist f im Sinne der obigen Definition auf einem größeren offenen Intervall erklärt und dort differenzierbar). Ist $f(a) = f(b) = 0$, so gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:

Wir benutzen den Satz:

Auf einer beschränkten abgeschlossenen Menge (hier also auf dem abgeschlossenen Intervall I) nimmt eine stetige Funktion ein Maximum an, d.h. es gibt ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in I$. Ist $f(\xi) = 0$, so wäre demnach $f \leq 0$ auf ganz I . In diesem Fall nutzen wir die Tatsache, dass f auf I auch ein Minimum annimmt, sagen wir in $\zeta \in I$. Ist $f(\zeta) = 0$, so bliebe nur übrig, dass $f \equiv 0$ auf I und daher und daher auch $f'(x) = 0$ für jeden inneren Punkt des Intervalls, und wir wären fertig. Also bleibt zu untersuchen, was man sagen kann, wenn $f(\xi) > 0$ oder $f(\zeta) < 0$. Betrachten wir oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nur den ersten Fall. Da $f(a) = f(b) = 0$, ist ξ sei ein innerer Punkt des Intervalls, also $a < \xi < b$. Ist $f'(\xi) = 0$, so sind wir fertig. Nehmen wir oBdA an, es wäre $f'(\xi) > 0$. Da

$0 < f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$, muß der Differenzenquotient $\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ für

hinreichend kleine h ebenfalls positiv sein. Dann wäre aber auch $f(\xi + h) - f(\xi) > 0$, also läge in ξ kein Maximum vor.

Mittelwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beweis: Wir stellen auf folgende einfache Weise die Voraussetzungen für eine Anwendung des Satzes von Rolle her: $g(t) := f(a + t(b - a)) - (f(a) + t(f(b) - f(a)))$ ist offenbar in einer offenen Umgebung von $[0, 1]$ erklärt und dort differenzierbar, und es gilt $g(0) = g(1) = 0$

Also gibt es eine Stelle $s \in \mathbb{R}$, $0 < s < 1$ mit $g'(s) = 0$. Man rechnet aber leicht aus, daß $0 = g'(s) = (b-a)f'(a+s(b-a)) - (f(b) - f(a))$, also folgt mit $\xi = a + s(b-a)$ die Behauptung.

Zweiter Mittelwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, d.h. differenzierbar in einem etwas größeren offenen Intervall. Es sei $g(b) \neq g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ in $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ mit $g'(\xi) \neq 0$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Man beweist diese Aussage, indem man den 1. Mittelwertsatz auf die folgende Funktion anwendet: $h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$.

Der 2. Mittelwertsatz ist ein nützliches technisches Hilfsmittel, zum Beispiel zum Beweis der

Regel von L'Hôpital:

Seien f, g in einer offenen Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$f(x_0) = g(x_0) = 0. \text{ Existiert } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ so auch } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ und es gilt } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Mit dieser Regel sind z.B. die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

leicht berechenbar. Man beachte, dass in den beiden letzten Beispielen die Regel mehrfach angewandt werden muß, um zum Ergebnis zu kommen.

Aber auch die **Taylorformel** lässt sich leicht ableiten:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(n+1)$ -mal differenzierbar. Man setze

$$h(x) := f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \text{ und } g(x) := (x-a)^{n+1} \text{ und wende den 2. Mittelwertsatz auf } h$$

$$\text{und } g \text{ an. Dazu berechne man zunächst } h'(x) := f'(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(a)}{i!} (x-a)^i \text{ und}$$

$$g'(x) = (n+1)(x-a)^n. \text{ Also ergibt sich:}$$

$$\frac{f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f'(\xi) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(a)}{i!} (\xi-a)^i}{(n+1)(\xi-a)^n}$$

An dieser Stelle sieht man aber sofort, dass man mit der rechten Seite dieser Gleichung in analoger Weise weitermachen kann, im nächsten Schritt ergibt sich

$$= \frac{f'(\xi) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(a)}{i!} (\xi - a)^i}{(n+1)(\xi - a)^n} = \frac{f''(\xi) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{f^{(i+2)}(a)}{i!} (\xi_2 - a)^i}{(n+1)n(\xi_2 - a)^{n-1}} =$$

und die Gleichungsreihe endet mit

$$\dots = \frac{f^{(n)}(\xi_{n-1}) - f^{(n)}(a)}{(n+1)(n) \cdots 2(\xi_{n-1} - a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}$$

Die Zwischenstellen in jedem Schritt, also $a < \xi_n < \xi_{n-1} < \dots < \xi_1 = \xi < x$, spielen dann im folgenden Schritte die Rolle einer Variablen.

Wenn wir den ersten und letzten Term der Gleichungskette vergleichen, ergibt sich die **Taylorformel mit Lagrange'schem Restglied**:

$$x \in [a, b] \Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (x-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $a, b \in U$.

Man definiert nun $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0, 1] : x = a + t(b - a)\}$ und analog $]a, b[$. Diese „Intervalle“ beschreiben also gerade die Verbindungsstrecke von a nach b .

Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a)$.

Beweis:

Mit $g(t) := f(a + t(b - a))$ haben wir die Voraussetzungen für die Anwendung des Mittelwertsatzes im Eindimensionalen, und daher mit der Kettenregel

$$g(1) - g(0) = g'(s) = Df(g(s))(b - a).$$

$\xi = g(s) = a + s(b - a)$ ist die gesuchte Zwischenstelle.

Folgerung:

Dieses Ergebnis erlaubt folgende nützliche Abschätzung:

$$\text{Ist für } x \in U \quad \|Df(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2} \leq M, \text{ so folgt} \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|,$$

d.h. eine Abschätzung für die Ableitung erlaubt eine Abschätzung für die Funktionswerte.

Damit folgt auch sofort: Verschwindet die Ableitung in U – ist also $\forall x \in U : Df(x) = 0$ – so ist die Abbildung konstant.

Im Eindimensionalen erhalten wir noch:

Folgerung:

Ist $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in I differenzierbar und $\forall x \in I : f'(x) > 0$, so ist f in I streng monoton steigend, d.h. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Beweis: Ist $x, y \in I$, $x < y$, so folgern wir mit dem Mittelwertsatz $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0$, also $f(y) > f(x)$.

Man hat naheliegende Verallgemeinerungen dieser Aussage für $f'(x) < 0$, $f'(x) \leq 0$, etc.