

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen									Gruppe	Tutor
1a	b	2a	b	c	3a	b	4a	b	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $0 \in R$ sei das neutrale Element der Addition, $1 \in R$ sei neutrales Element der Multiplikation,

Zeigen Sie mit Hilfe des Distributivgesetzes, daß gilt:

- Ist $x \in R$, so folgt $0 \cdot x = x$ und $-x = (-1) \cdot x$.
- Ist R ein Integritätsring und sind $x, y, z \in R$, so folgt aus $x \neq 0$ und $xy = xz$ daß $y = z$.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Man setze $R := \mathcal{P}(M)$, $0 := \emptyset$, $1 := M$. Sind $A, B \subset M$, so setze man $A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ und $A \cdot B := A \cap B$. $(R, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

- Man begründe, ob die additive Gruppe dieses Rings einen Erzeuger besitzt, oder ob nicht.
- Man zeige das Distributivgesetz für diesen Ring.
- Für $M := \{1, \dots, 10\}$ und $A := \{1, 3, 5\}$ berechne man das additiv inverse Element $-A$.

Aufgabe 3

- Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Matrizen in $M_3(\mathbb{Z}_5)$. Berechnen Sie AB und BA .

- Finden Sie eine Matrix $A \in M_4(\mathbb{Z})$, für die $A^3 \neq 0 = A^4$

Aufgabe 4

a) Sei $R := \mathbb{Z}_5$ und $a = a_5 \dots a_0 = 423102$, $b = b_4 \dots b_0 = 13413$ als Strings von Elementen von $\mathbb{Z}_5$ gegebene Polynome in $\mathbb{Z}_5[X]$. Berechnen Sie das Polynomprodukt ab .

b) Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Z}_2$ und stellen Sie fest, ob es im Polynomring $\mathbb{Z}_2[X]$ Polynome zweiten Grades gibt, welche nicht Produkt zweier Polynome ersten Grades sind, und ob es Polynome dritten Grades gibt, welche nicht Produkt eines Polynoms ersten Grades und eines Polynoms zweiten Grades sind.