

Blatt 11

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen						Gruppe	Tutor
1a	b	c	d	2	3	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Wir können die Begriffe Differenzierbarkeit und Ableitung, welche in der Vorlesung zunächst für Abbildungen $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert wurden, ohne Änderung auf beliebige Banachräume (d.h. vollständige normierte Vektorräume) übertragen.

Seien dazu E, F Banachräume, $U \subset E$ sei offen, $f : U \rightarrow F$ sei eine Abbildung. Man sagt, f sei in $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn es eine stetige¹ lineare Abbildung $A : E \rightarrow F$ gibt, für die gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset U \text{ und } \forall x \in U : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\| < \varepsilon \|x - x_0\|$$

Weiter unten sollen Sie zeigen, daß damit die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt ist. Man nennt sie die Ableitung von f in x_0 und schreibt auch $Df(x_0) := A$. Die Ableitung ist also eine lineare Abbildung.

Aufgabe 1

Für eine stetige lineare Abbildung $A : E \rightarrow F$ definiert man die Norm $\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ ².

Damit diese Definition sinnvoll ist, muß zunächst gezeigt werden: Die Teilmenge $\{\|Ax\| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt.

- a) Folgern Sie dies aus der Stetigkeit von A im Nullpunkt $0 \in E$.
- b) Zeigen Sie dann, daß für alle $x \in E$ gilt: $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

1 Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind immer stetig. Bei unendlichdimensionalen Banachräumen muß man dies extra fordern. Nur dann läßt sich schließen, daß eine im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbare Abbildung dort auch stetig ist.
 2 In Anlehnung an die Matrixschreibweise schreibt man kurz Ax statt $A(x)$, wenn kein Mißverständnis möglich ist.

c) Zeigen Sie, daß $\|A\|=0$ gdw. $A=0$ ³

d) Die Menge $M := \{c \in \mathbb{R} \mid c \geq 0 \text{ und } \forall x \in E: \|Ax\| \leq c\|x\|\}$ ist offenbar durch 0 nach unten beschränkt und nicht-leer, da $\|A\| \in M$. Zeigen Sie, daß $\|A\| = \inf M$.

Bemerkung: Ist $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ und gilt $\forall x \in E: \|Ax\| \leq c\|x\|$, so folgt sofort aus d) daß $\|A\| \leq c$.

Aufgabe 2

Seien wie oben E, F Banachräume, $U \subset E$ sei offen, $f: U \rightarrow F$ sei eine Abbildung, welche in $x_0 \in U$ differenzierbar ist.

Nehmen Sie an, es gäbe zwei stetige lineare Abbildungen $A, B: E \rightarrow F$, die die Bedingung aus der Differenzierbarkeitsdefinition erfüllen, also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: U_\delta(x_0) \subset U \text{ und } \forall x \in U: 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\| < \varepsilon \|x - x_0\|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: U_\delta(x_0) \subset U \text{ und } \forall x \in U: 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0) - B(x - x_0)\| < \varepsilon \|x - x_0\|$$

Zeigen Sie, daß dann gelten muß: $\forall \varepsilon > 0 \forall y \in E: \|(A - B)(y)\| \leq \varepsilon \|y\|$

Bemerkung:

Aus dem oben Gezeigten folgt dann $\forall \varepsilon > 0: \|(A - B)\| \leq \varepsilon$, daher $\|A - B\| = 0$, daher $A - B = 0$, daher $A = B$. Insgesamt also: die Ableitung ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3

Seien wieder E, F Banachräume, $U \subset E$ sei offen, $f: U \rightarrow F$ sei eine Abbildung, welche in $x_0 \in U$ differenzierbar ist. Zeigen Sie: f ist stetig in x_0 .

³ d.h. A ist die Nullabbildung, also $\forall x \in E: Ax = 0$