Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2013
M. Hortmann

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen							**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	2a	b	3a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	7	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Die n-te Partialsumme der Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ läßt sich, wie man sofort sieht, rekursiv so aufbauen: $s_{n,n}(x):=1$; $s_{n,k-1}(x):=\frac{x \cdot s_{n,k}(x)}{k}+1$; $s_n(x):=s_{n,0}(x)$ [1].

a) Schreiben Sie eine Pari-Funktion, die diese Rekursion realisiert und berechnen Sie $e \simeq s_{20,0}(1)$

b) Wählen Sie mit Pari eine zufällige reelle 5x5 Matrix A und setzen Sie $A:=A-A^t$. Die so entstandende Matrix ist antisymmetrisch, d.h. es gilt jetzt $-A=A^t$. Setzen Sie jetzt die Nachkommastellenpräzision hoch durch `default(realprecision,1000)` und berechnen Sie $B:=s_{100,0}(A) \simeq \exp(A)$ und anschließend $C:=B \cdot B^t$. Der Übersichtlichkeit wegen reduzieren Sie nunmehr für den Output von C die Nachkommastellenzahl mit dem Befehl `precision(C,3)` .

Was fällt auf und was bedeutet dies für die Matrix B?

c) Wir hatten die Zahl π so definiert, daß $\pi/2$ die kleinste positive Nullstelle der Cosinusfunktion sei. Zwar könnten Sie jetzt Cosinus mit einer Rekursion wie oben berechnen. Benutzen Sie aber der Einfachheit halber die in Pari eingebaute Cosinusfunktion um festzustellen, daß $\cos(2)<0$ und definieren Sie die Folge (η_n) rekursiv durch $\eta_1:=1$; $\eta_{n+1}:=\begin{cases} \eta_n+(1/2)^n & \text{falls} \quad \cos(\eta_n)>0 \\ \eta_n-(1/2)^n & \text{sonst} \end{cases}$.

---

1 Machen Sie dies einmal per Hand z.B. für n=5. Dieses Verfahren zur Berechnung der Exponentialreihe ist besser als das Hornerschema, da man die Inversen der Fakultäten nicht separat berechnen muß.

Offenbar sollte gelten: $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \pi/2$.

Realisieren Sie die Folge (η_n) mit Hilfe einer geeigneten Pari-Funktion, setzen die Präzision wieder hoch mit `default(realprecision,1000)` und überzeugen sich, daß die Differenz zu `Pi/2` klein ist.

Aufgabe 2

Damit man für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die absolute Konvergenz z.B. der Exponentialreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$ nachweisen kann, benötigt man für eine geeignete Matrixnorm die Ungleichung $\|AB\| \leqslant c\|A\|\|B\|$, wobei c>0 eine von den Matrizen A,B unabhängige Konstante ist.
Denn dann ist sofort $\|A^i\| \leqslant c^{i-1}\|A\|^i = c^{-1}(c\|A\|)^i$, und es ist bekannt, daß die reelle Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(c\|A\|)^i$ konvergiert.

Die schönste Matrixnorm dieser Art gewinnt man so: Gehen wir ohne Beweis davon aus, daß für eine reelle *m*x*n*-Matrix A die Wertemenge $\{\|Ax\| \mid \|x\| \leqslant 1\}$ nach oben beschränkt ist, so wird durch $\|A\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$ eine Norm definiert, für die man die Ungleichungen $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ und $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ leicht nachweist. Für die oben geforderte positive Konstante gilt in diesem Fall c=1.
Der Nachteil bei dieser Norm ist, daß sie sich nicht so leicht berechnen läßt.

Man kann aber auch $\|A\| := \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|$ wählen. Zeigen Sie dafür:

a) für alle $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ gilt: $\|AB\| \leqslant n\|A\|\,\|B\|$ [2] .
b) Finden Sie eine Konstante c>0, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|Ax\| \leqslant c\|A\|\,\|x\|$ [3] .
(c soll unabhängig von A und x sein.)

Aufgabe 3

a) Leiten Sie aus der Fundamentalformel für die Exponentialfunktion und den Definitionen $\cos(z) := (\exp(iz) + \exp(-iz))/2$ und $\sin(z) := (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i)$ Formeln für cos(z+w) und sin(z+w) her, in denen nur Summen und Produkte von Sinus und Cosinus vorkommen.

b) Benutzen Sie die in a) gefundenen Formeln und die Kenntnis der Werte von cos(0), cos(π/2), sin(0), sin(π/2), um cos(π/5) zu berechnen.

2 Dabei ist natürlich $\|B\| := \max_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le \mu\le k}} |b_{j\mu}|$.

3 In dieser Formel taucht auf der linken Seite des Ungleichheitszeichens eine Norm im $\mathbb{R}^m$ und auf der rechten Seite eine Norm in $\mathbb{R}^n$ auf. In beiden Fällen wähle man die Euklidische Norm. Mit dieser Wahl wird der Nachweis von b) etwas schwieriger als der von a).