Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2013
M. Hortmann

Blatt 8

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Name							Gruppe	Tutor
1	2a	b	3	4	5a	b	**Summe**	**bearbeitet**
2	1	1	2	2	1	1	10 Punkte	

Verwenden Sie nach Möglichkeit für die Lösung jeder Aufgabe nur das vorgedruckte Blatt, welches die Aufgabenstellung enthält. Dabei können Sie natürlich auch die Rückseite nutzen.

Vergessen Sie nicht, auf jedem Blatt und auch diesem Deckblatt Ihren Namen, Ihre Tutoriumsnummer (steht in Studip) und den Namen Ihres Tutors zu notieren.
Sollten Sie weitere Blätter benötigen, schreiben Sie auf jedes Zusatzblatt ebenfalls Ihren Namen, Ihre Tutoriumsnummer, den Namen Ihres Tutors, sowie die Aufgabenummer und die zugehörige Seitenummer, z.B. Aufg. 5, Blatt 2. Dies ist nötig, da für die Korrektur die einzelnen Blätter getrennt und danach wieder zusammengeheftet werden.

Zwar sollen Sie wie üblich die Aufgaben in Ihrer Tutoriumsgruppe besprechen, aber die Formulierung der Lösungen und die Niederschrift eigenständig verfassen.

Name:
Gruppennummer:
Tutor:

Aufgabe 1

Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine reelle symmetrische 2x2-Matrix. Man zeige:

Wenn $a>0$ und $\det(A) = ac - b^2 > 0$, dann gibt es kein $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ mit $x^t A x = 0$ [1].

1 letztlich folgt, daß $x^t A x$ nie negativ wird, d.h. man beweist einen einfachen Teilfall des "Nordwestkriteriums".

Name:
Gruppennummer:
Tutor:

Aufgabe 2

Man repräsentiere wie in Blatt 8 in Pari eine Permutation in $\mathfrak{S}_n$ als Vektor mit n Komponenten und schreibe Pari-Funktionen

a) `perm_mult(p,q)` und
b) `perm_inv(p)`

welche die Multiplikation und Inversenbildung von Permutationen implementieren.

Zum Test setzen Sie

```
p = [18,25,16,11,4,12,15,17,6,26,9,10,19,27,23,3,21,7,28,14,5,1,2,8,13,22,20,30,29,24]
q = [30,25,13,19,10,20,5,15,18,28,14,9,12,22,29,8,21,3,7,16,2,1,4,24,11,6,27,23,17,26]
```

und dokumentieren den Output von `perm_mult(p,q)` und `perm_inv(p)` .

Name:
Gruppennummer:
Tutor:

Aufgabe 3

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Man führe, ausgehend von dieser Basis, das Gram-Schmidt-Verfahren durch, um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu finden, welche den Vektor $\begin{pmatrix} 3/13 \\ 4/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$ enthält.

Name:
Gruppennummer:
Tutor:

Aufgabe 4

Seien $X, A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, X sei invertierbar. Man zeige:
Ist A symmetrisch und positiv definit, so auch $X^t A X$.[2]

2 Trivialerweise gilt auch die Umkehrung. Außerdem kann man speziell von $A=E$ und einer beliebigen invertierbaren Matrix X ausgehend alle symmetrischen positiv definiten Matrizen finden, indem man $X^t E X = X^t X$ berechnet .

Name:
Gruppennummer:
Tutor:

Aufgabe 5

In der "affinen Geometrie" sind "Punkte" die Elemente eines Vektorraums", "Geraden" sind verschobene 1-dimensionale Unterräume, "Ebenen" sind verschobene 2-dimensionale Unterräume, etc.

In der "projektiven Geometrie" sind "Punkte" die eindimensionalen Unterräume eines Vektorraums, "Geraden" die zweidimensionalen" Unterräume, "Ebenen" die dreidimensionalen, etc.
Ein "Punkt" "liegt auf einer Geraden", wenn der betreffende 1-dimensionale Unterraum Teilmenge des betreffenden 2-dimensionalen Unterraums ist. Zwei Geraden "schneiden sich in einem Punkt", wenn der Durchschnitt der zugehörigen 2-dimensionalen Unterräume gleich dem zugehörigen 1-dimensionalen Unterraums ist, etc.

Betrachten Sie speziell den Vektorraum $\mathbb{Z}_2^3$.

a) Fertigen Sie eine Liste aller 1-dimensionalen und aller 2-dimensionalen Unterräume an.

Erstere bilden die Punkte und zweitere die Geraden eines projektiven Raumes.
Überzeugen Sie sich, daß es zu je zwei verschiedenen Punkten genau eine Gerade gibt, auf der die beiden Punkte liegen, und daß es zu je zwei verschiedenen Geraden genau einen Punkt gibt, in dem die beiden Geraden sich schneiden.

Nummerieren Sie die "Punkte" und "Geraden", schreiben in eine Zeile die Nummern aller Punkte, in eine weitere Zeile die Nummern aller Geraden und verbinden Sie die Nummern der Punkte mit den Nummern der Geraden, auf denen der entsprechende Punkt liegt.

b) Konstruieren Sie einen möglichst symmetrischen Graphen, dessen Ecken genau den obigen Punkten und dessen Kanten genau den obigen Geraden entsprechen.