

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen								Gruppe	Tutor
1a	b	c	cα	cβ	2	3a	b	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	1	2	7 Punkte=100%	

Aufgabe 1

a) Schreiben Sie alle 24 Summanden in der Leibniz-Formel $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$ für eine 4x4-Matrix hin.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_7 , indem Sie

sie mit Hilfe geeigneter elementarer Zeilen- und/oder Spaltenumformungen auf obere Dreiecksgestalt bringen. Dokumentieren Sie jeden Schritt Ihrer Rechnung.

c) Eine Permutation in \mathfrak{S}_n läßt sich schreiben als Vektor der Länge n , unter dessen Komponenten jedes Element von \mathbb{N}_n genau einmal vorkommt.

α) Schreiben Sie eine Pari-Funktion `randperm(n)`, deren Output eine zufällige Permutation der Länge n ist.

β) Schreiben Sie in Pari eine Funktion `signum(p)`, deren Output das Vorzeichen der Permutation p ergibt, indem sie den Permutationsvektor p mit möglichst wenigen Vertauschungen in die natürliche Reihenfolge bringt und dabei die Anzahl der Vertauschungen zählt.

Aufgabe 2

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

Ist $x \in V$, so setzt man $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ und nennt dies Norm oder Länge des Vektors x . Wählt man im Fall $V = \mathbb{R}^n$ das kanonische Skalarprodukt, so ist $\|x\|$ tatsächlich gleich der euklidischen Länge von x .

Machen Sie sich klar, daß ein Dreieck in V gegeben ist durch drei Punkte $x, y, z \in V$, die nicht auf einer Geraden liegen, von denen also jedenfalls zwei linear unabhängig sind.

Faßt man x, y, z als Eckpunkte auf, so sind $u := y - x, v := z - y, w := x - z$ die Seiten.

Offenbar ist $u + v + w = 0$ und damit $u + v = -w$.

Man rechne mit Hilfe der Rechenregeln für ein Skalarprodukt nach, daß:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|w\|^2 \quad \text{gdw.} \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad (\text{Pythagoras!})$$

Aufgabe 3

Sind $x, y \in \mathbb{R}^3$, so ist durch $(x, y) \rightarrow x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ eine bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

definiert (Kreuzprodukt). Man zeige

a) $\langle x, x \times y \rangle = 0$

b) $x \times y = 0$ gdw. x, y sind linear abhängig.