Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2013
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen								**Gruppe**	**Tutor**
1	2a	b	c	3a	b	c	d	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

A sei eine Matrix mit 5 Zeilen und 7 Spalten mit Koeffizienten im Körper K und es sei $\lambda \in K$.

Schreiben Sie diejenige quadratische Matrix hin, mit der Sie A von links multiplizieren müssen, damit das Ergebnis diejenige Matrix ist, die aus A entsteht, wenn man das λ-fache der 4. Zeile von A zur 2. Zeile von A addiert.

Geben Sie die quadratische Matrix an, mit der Sie A von rechts multiplizieren müssen, damit das Ergebnis diejenige Matrix ist, die aus A entsteht, wenn man das λ-fache der 4. Spalte von A zur 2. Spalte von A addiert.

Aufgabe 2

a) Man bringe die Matrix $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$ durch elementare Zeilenumformungen

auf Gaußsche Normalform $\begin{pmatrix} E & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Lesen Sie aus der Gaußschen Normalform eine Basis des Kerns von A ab.

c) Gibt es eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax=b$ mit $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4$?

Falls ja, geben Sie eine an.

Aufgabe 3

Seien V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\pi: V \to V$ heißt Projektion, wenn $\pi \circ \pi = \pi$.[1]
Entsprechend nennt man eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ Projektionsmatrix oder auch nur Projektion, wenn $AA=A$.

a) Man zeige: Ist $\pi: V \to V$ eine Projektion und $x \in V$, so gibt es eine eindeutige Darstellung $x=y+z$ mit $y \in \ker \pi$ und $z \in \operatorname{Im} \pi$.

b) Man gebe eine Projektionsmatrix $A \in \mathbb{Z}_5^3$ an, deren Kern 1-dimensional ist und den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

c) Ist $A \in M_{n\times n}(K)$ eine Projektionsmatrix und $B \in M_{n\times n}(K)$ invertierbar, so ist auch $B\,A\,B^{-1}$ eine Projektionsmatrix.

d) Man konstruiere mit Hilfe von b) und c) eine Projektionsmatrix $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$, deren Kern 1-dimensional ist und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ enthält.

1 Offenbar sind id_V und die Nullabbildung Projektionen.