

**Blatt 5**

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen						Gruppe	Tutor
1	2a	b	c	3a	b	<b>Summe</b>	<b>bearbeitet</b>
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

**Aufgabe 1**

Sei  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}_7)$ .

Berechnen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus die Inverse  $A^{-1}$ .

**Aufgabe 2 (Quaternionen)**

Betrachten Sie die Matrizenmenge  $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ .

a) Man zeige: jede von der Nullmatrix verschiedene Matrix in  $\mathbb{H}$  besitzt eine Inverse. Man gebe diese Inverse konkret an.

b) Durch  $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 & -x_3 + i x_4 \\ x_3 + i x_4 & x_1 - i x_2 \end{pmatrix}$  ist ein Isomorphismus  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}$  gegeben. Zu

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$  setze man  $a \cdot x := \Phi^{-1}(\Phi(a) \cdot \Phi(x))$  und berechne für die kanonische Basis

des  $\mathbb{R}^4$  alle 16 Produkte  $e_i \cdot e_j$ .

---

1 Beachten Sie die natürliche  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur von  $\mathbb{H}$ .

c) Berechnen Sie die zu der linearen Abbildung  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $x \mapsto \Phi^{-1}(\Phi(a) \cdot \Phi(x))$  gehörige reelle 4x4 Matrix.

(Grundsätzlich gilt: in den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Basisvektoren, hier also die Vektoren  $\Phi^{-1}(\Phi(e_i) \cdot \Phi(x))$ ).

### Aufgabe 3

Sei  $A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

a) Die Koeffizientenfolgen der Matrizenfolge  $A_n := A^n$  bilden Nullfolgen.

Beweisen Sie dies für die Koeffizientenfolge  $(a_{11}^n)$ .

b) Analog der Grenzwertformel für die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1}$  für  $q \in \mathbb{R}$ ,  $|q| < 1$  sollte

jetzt auch gelten:  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (E - A)^{-1}$ ;

Prüfen Sie mit Hilfe von Pari nach, daß sich für große  $N \in \mathbb{N}$  die Koeffizienten der Matrix

$(E - A)^{-1}$  kaum von den Koeffizienten der Matrix  $\sum_{n=0}^N A^n$  unterscheiden.

Dokumentieren Sie Ihre Rechnungen und Ergebnisse.