

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen						Gruppe	Tutor
1a	b	c	2	3	4	Summe	bearbeitet
1	1	1	2	1	3	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Man betrachte den Vektorraum $V := \mathbb{Z}_2^3$ über dem Körper \mathbb{Z}_2 .

a) Zeigen Sie, daß $U_1 := \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ und $U_2 := \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ Untervektorräume von V sind.

b) Fertigen Sie - ohne weiteren Beweis - eine systematische Liste aller Unterräume von V an.

c) Fertigen Sie Listen aller Elemente von V/U_1 und V/U_2 an.

Aufgabe 2

Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ linear. Man zeige: f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$.

Aufgabe 3

Sei $K := \mathbb{Z}_5$ und $V := K^3$. Man betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und die durch $x \rightarrow Ax$

gegebene lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$.

Beschreiben Sie, wie Sie ein vom Nullvektor verschiedenes Element von $\ker A$ finden.

Aufgabe 4

Legen Sie übungshalber eine Datei mit der Endung .pbm an, welche genau folgenden Inhalt besitzt:

```
P1
# Kommentar: 24 ist die Anzahl der Spalten 7 die Anzahl der Spalten
24 7
00000000000000000000000000000000
011110011110011110011110011110
010000010000010000010000010010
011100011100011100011100011110
010000010000010000010000010000
010000011110011110010000000000
000000000000000000000000000000
```

Diese Datei können Sie mit vielen Bildbetrachtungsprogrammen anschauen, z.B. mit IrfanView.

Definieren Sie eine lineare Abbildung $\mathbb{Z}_2^{64} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{64}$ durch die Vorschrift $(x_0, \dots, x_{63}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{64})$: dabei sei $x_{64} := x_0 + x_1 + x_3 + x_4$. Man verschiebt also die Bits im Ausgangsvektor nach links, läßt am Ende ein nach obiger Vorschrift gegebenes Bit nachrücken und am Anfang ein Bit herausfallen. Indem man diesen Prozess hinreichend oft wiederholt, entsteht eine beliebig lange Bitfolge - man spricht von einer "linearen Schieberegisterfolge". Im gegebenen Fall läßt sich zeigen, daß sich die Folge erst nach 2^{64} Schritten wiederholt.

Ausgehend von einem zufälligen vom Nullvektor verschiedenen Bitvektor (x_0, \dots, x_{63}) berechne man die Folge (x_i) bis zum Index $n = 1024 \cdot 768 - 1 = 786431$ und schreibe x_0, \dots, x_n entsprechend der obiger Form in eine pbm-Datei mit dem "Header"

```
P1
1024 768
```

In jede Zeile schreiben Sie nur 32 Binärziffern, codiert als Ascii-Zeichen: mit Zwischenraum sind dies 64 Ascii-Zeichen; eine .pbm-Datei darf standardmäßig nur 70 Zeichen pro Zeile enthalten.

Dokumentieren Sie das Pari-Programm und alle weiteren Schritte, mit denen Sie die Aufgabe lösen, sowie das Outputbild, das Sie auf diese Weise erzeugt haben. Geben Sie einen Link auf die von Ihnen erzeugte pbm-Datei an.