Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2013
M. Hortmann

Blatt 1

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen							Gruppe	Tutor
1a	b	c	2a	b	c	3	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Seien A, B Mengen. Man zeige:
a) Ist $f: A \to B$ eine injektive Abbildung, so gibt es eine surjektive Abbildung $g: B \to A$.
b) Ist $g: B \to A$ eine surjektive Abbildung, so gibt es eine injektive Abbildung $f: A \to B$.

Hinweis: Bei der Konstruktion der injektiven Abbildung f in b) müssen Sie zu jedem der potentiell unendlich vielen $a \in A$ ein Element $f(a)$ aus einer gewissen von g und a abhängigen Teilmenge nicht weiter unterscheidbarer Elemente von B auswählen. Gehen Sie davon aus, daß dies möglich ist. (Auswahlaxiom!)

Eine Menge A heißt **endlich**, wenn jede injektive Abbildung $A \to A$ surjektiv ist.
A ist auch genau dann endlich, wenn jede surjektive Abbildung $A \to A$ injektiv ist.

Eine Menge A heißt **unendlich**, wenn sie nicht endlich ist.
Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist unendlich, weil die Nachfolgeabbildung $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv aber nicht surjektiv ist. Zeigen Sie

c) Wenn es eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt, so ist A unendlich.

Es gilt auch umgekehrt: Wenn A unendlich ist, so gibt es eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$. Dies könnte mit einer rekursiven Konstruktion einer Abbildung $f: \mathbb{N} \to A$ gezeigt werden: Man wählt $f(1)$ beliebig, setzt voraus daß $f: \mathbb{N}_n \to A$ [1] schon definiert ist und wählt für $f(n+1)$ ein beliebiges Element von $A \setminus f(\mathbb{N}_n)$. Daß es ein solches Element gibt, ist aus der Unendlichkeit von A zu folgern. Anschließend beweist man die Injektivität der so definierten Abbildung $f: \mathbb{N} \to A$.

1 $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$

Eine Menge A heißt **abzählbar**, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt.
Mit dieser Definition sind auch endliche Mengen abzählbar. Man definiert daher noch:
Eine Menge A heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie abzählbar und nicht endlich ist.
Eine Menge A ist genau dann abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt.
Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie unendlich und nicht abzählbar ist.
Die Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge ist überabzählbar.

Aufgabe 2
Man zeige: Sind die Mengen A,B abzählbar, so auch
a) $A \cup B$ und
b) $A \times B$
c) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie abzählbarer Mengen, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Anwendung von c): Die Menge A_n der Bitstrings der Länge n ist endlich, also abzählbar. Für die Menge A aller endlichen Bitstrings gilt offenbar $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Also ist A abzählbar.

Aufgabe 3
Betrachten wir die Menge $R := \{ f : \mathbb{Z} \to \{0,1\} \mid \exists n\in\mathbb{N}\, \forall m \geqslant n : f(m) = 0 \}$.
Ein Element f dieser Menge läßt sich identifizieren mit einem unendlichen Bitstring $\ldots b_n \ldots b_0 . b_{-1} \ldots b_{-k} \ldots$, wobei $b_i = f(i)$. Wir werden später genauer sehen, daß ein solcher Bitstring die reelle Zahl $\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i 2^i$ darstellt, und daß jede reelle Zahl eine solche Darstellung besitzt.

Sie sollten intuitiv wissen, wie man zwei Bitstrings $\ldots a_n \ldots a_0 . a_{-1} \ldots a_{-k} \ldots$, $\ldots b_n \ldots b_0 . b_{-1} \ldots b_{-k} \ldots$ zu addieren hat und als Summe den Bitstring $\ldots c_n \ldots c_0 . c_{-1} \ldots c_{-k} \ldots$ erhält. Bemühen Sie sich um eine algorithmische Beschreibung dieser Addition: dabei ist für ein beliebiges $i \in \mathbb{Z}$ festzustellen, ob $c_i = 0$ oder $c_i = 1$.

Bemerkung zum Hintergrund dieser Aufgabe:
Die Menge R ist überabzählbar: man zeigt leicht, daß sie mindestens so mächtig ist wie die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Zu R gehören auch solche Bitstrings, deren Ziffernfolge "keinem Gesetz folgt". Informatiker haben meist nur mit "algorithmisch konstruierbaren" Bitstrings zu tun, d.h. mit solchen, zu denen es einen Algorithmus gibt, der bei Input des Binärstrings für die Zahl n das Bit b_n ausrechnet. Da sich jeder Algorithmus selbst als endlicher Bitstring (String von Ascii-Bytes) in einer Programmiersprache schreiben läßt und die Menge der endlichen Bitstrings abzählbar ist, gibt es nur abzählbar viele "algorithmisch konstruierbare" Bitstrings. Da die Menge der reellen Zahlen gleichmächtig ist mit der Menge der unendlichen Bitstrings und die wiederum überabzählbar ist, kann man offenbar nur eine relativ winzige Teilmenge der reellen Zahlen algorithmisch konstruieren. Zu denen, die man so fassen kann, gehören aber die Elemente der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, aber auch irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ und transzendente irrationale Zahlen wie e und π .

Aufgabe 4 (freiwillige Sonderaufgabe)

a) Geben Sie eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ an. (vergleichsweise trivial)
b) Geben Sie eine injektive Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ an.

Lesen Sie in Wikipedia über: "Mächtigkeit, "Satz von Schröder-Bernstein" und "Auswahlaxiom".
Empfehlenswert: Dirk W. Hoffmann, Grenzen der Mathematik