

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						Gruppe	Tutor
1a	b	2	3a	b	4	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Man betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$. Ihr Kern $U := \ker A$ ist ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

- Man finde zwei Vektoren ungleich Null in U , die aufeinander senkrecht stehen.
- Man finde zwei weitere Vektoren in $\mathbb{R}^4$, die zusammen mit denen aus a) eine Basis bilden, deren sämtliche Elemente paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 2

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $a, b \in V$ und $c = a + b$. Man zeige $\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ gilt genau dann, wenn $\langle a, b \rangle = 0$.

Aufgabe 3

Man betrachte die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und die Ebene $E := \{(u, v, 1) \sim u, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch einen vom Südpol $S = (0, 0, -1) \sim$ verschiedenen Punkt $P = (x, y, z) \sim \in S^2$ der Sphäre und den Punkt S schneidet die Ebene E in genau einem Punkt $(u, v, 1)$. Man betrachte nun die bijektive Abbildung $\varphi: S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch $(x, y, z) \sim \mapsto (u, v) \sim$ gegeben ist.

- Man finde eine Formel, um $\varphi((x, y, z) \sim)^2$ zu berechnen.
- Man finde eine Formel für die inverse Abbildung $\psi = \varphi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$.

1 Es wird die Notation $(x_1, \dots, x_n) \sim$ benutzt, um anzudeuten, daß es sich um einen "Spaltenvektor" handelt.
2 d.h. man drücke u und v mit Hilfe von x, y, z aus. φ heißt auch stereographische Projektion (Kartographie).

Aufgabe 4

Die Matrix $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt mit dem

Drehwinkel φ . Daher beschreibt $D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine entsprechende Drehung im $\mathbb{R}^3$ um

die z -Achse. Weiterhin sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine orthonormale Matrix, also eine Matrix für die

gilt $A^t \cdot A = E$, bzw. $A^t = A^{-1}$. Dies bedeutet gerade, daß in den Spalten von A nur Einheitsvektoren stehen, die paarweise orthogonal sind. A kann als lineare Abbildung interpretiert werden, welche die kanonische Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ in die durch die Spaltenvektoren gegebene Orthonormalbasis abbildet.

Die Abbildung $x \rightarrow ADA^{-1}x$, also ADA^{-1} , kann daher als Drehung um die durch den Vektor

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegebene Achse angesehen werden, sollte also nicht von $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ abhängen.

Man rechne daher ADA^{-1} so aus, daß in dieser Matrix schließlich nur die Größen $\sin \varphi, \cos \varphi, b_1, b_2, b_3$ vorkommen, nicht aber $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$.