

Blatt 3

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								Gruppe	Tutor
1	2a	b	3	4a	b	c	d	Summe	bearbeitet
1	1	1	0	1	1	1	2	7 Punkte=100%	

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist zunächst definiert als die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mit der komponentenweise definierten Addition und der durch $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$ definierten Multiplikation ist $\mathbb{C}$ ein kommutativer Körper. Für Elemente der Form $(a, 0)$ schreibt man abkürzend nur a , und man definiert $i := (0, 1)$. Damit hat man $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i$. Es läßt sich also jede komplexe Zahl in der Form $a + b \cdot i$ schreiben, und man nennt a den Realteil und b den Imaginärteil. Mit der Schreibweise $a = (a, 0)$ gilt auch in natürlicher Weise $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, und das Nullelement der Addition $(0, 0)$ wird identifiziert mit $0 \in \mathbb{R}$ und das Einselement der Multiplikation $(1, 0)$ mit $1 \in \mathbb{R}$. Offenbar gilt $i^2 := (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Ist $z = a + b \cdot i$, so definieren wir "die zu z konjugiert komplexe Zahl" durch $\bar{z} := a - b \cdot i$. Geometrisch entsteht $\bar{z}$ durch "Spiegelung von z an der reellen Achse".

1. Man stelle das multiplikativ Inverse von $3 + 4 \cdot i$ in der Form $a + b \cdot i$ dar.

Wir setzen im Folgenden voraus, daß in $\mathbb{R}$ zu jeder nicht-negativen Zahl a eine eindeutig bestimmte nicht negative Quadratwurzel existiert, also eine nicht negative Zahl b mit $b^2 = a$, welche man auch als $\sqrt{a}$ schreibt.

2. Man zeige:

a) Sind a, b nicht-negative reelle Zahlen, so gilt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $z := a + b \cdot i$, so ist $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. ($z \cdot \bar{z}$ ist offenbar reell und nicht-negativ.)

Man setzt für $z \in \mathbb{C}$ $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ und nennt die nicht-negative reelle Zahl $|z|$ den "Absolutbetrag" von z . Offenbar gilt $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$. Offenbar hat man auch $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ und $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$. Bezeichnen wir den Realteil von z mit $\operatorname{Re} z$, und den Imaginärteil von z mit $\operatorname{Im} z$, so gilt $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ und $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$.

3. Machen Sie sich die geometrische Bedeutung von $|z|$ klar!

4. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Man zeige:

a) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$. (Hinweis: Man zeige dazu $(\operatorname{Re} z)^2 \leq z \cdot \bar{z}$.)

b) Es gilt $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

c) Es gilt $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. (Hinweis: Man zeige dazu $|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$.)

d) Es gilt: $|z + w| \leq |z| + |w|$. (Hinweis: Man zeige dazu $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.)

Mit den oben gezeigten Eigenschaften des Absolutbetrags ergibt sich sofort, daß durch $d(z, w) := |z - w|$ auf $\mathbb{C}$ eine Metrik definiert wird.