

Blatt 2

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen									Gruppe	Tutor
1a	b	2	3	4	5a	b			Summe	bearbeitet
1	1	1	1	2	1	1			7 Punkte=100%	

Auf den reellen Zahlen betrachten wir im folgenden immer die natürliche Metrik $d(x, y) = |y - x|$.

1. a) Man bilde die Folge der natürlichen Zahlen, d.h. man setze $x_n := n$ und zeige: die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

b) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Man setze $x_n := q^n$ und zeige: die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

2. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und es sei $s \in \mathbb{R}$. Man setze $y_n := s x_n$ und zeige direkt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: |y_n - sa| < \varepsilon$ ¹.

3. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Man zeige: es gibt eine Zahl $A \in \mathbb{R}$, so daß $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \leq A$ ².

4. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M, d) und es sei $a \in M$.

Man zeige: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt genau dann den Grenzwert a , wenn die durch $y_n := d(x_n, a)$ gegebene Folge eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist.

5. Seien (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrische Räume. Auf $M_1 \times M_2$ setze man:

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

a) Man zeige: d_∞ ist eine Metrik auf $M_1 \times M_2$.

b) Man setze $M_1 := M_2 := \mathbb{R}$ und wähle mit $d_1 := d_2 := d$ beidesmal die natürliche Metrik auf $\mathbb{R}$. Man gebe eine geometrische Beschreibung der offenen Kugel mit Radius 1 um den Punkt $(0,0)$ bezüglich der Metrik $d_\infty \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ³.

¹ mit anderen Worten: $\lim_{n \rightarrow \infty} s x_n = s a$

² Dies ist gleichbedeutend mit: Die Menge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben beschränkt.

³ Man erinnere sich an die geometrische Beschreibung offener Kugeln bzgl der "Taxifahrer-Metrik" in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.