

Aufgabenblatt 2, Korrektur

Wie sich schon im Plenum andeutete, gibt es einen Fehler in Aufgabe 2b):

Sei R ein Integritätsring.

Zeigen Sie: d ist genau dann größter gemeinsamer Teiler von a, b , wenn auf der Idealebene gilt $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$, wobei wie üblich $\langle a, b \rangle := \{ra + sb \mid r, s \in R\}$.

Dabei ist die folgende Teilaussage falsch:

Wenn d ein größter gemeinsamer Teiler von a, b ist, dann folgt $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$.

Gehen Sie so vor:

1. Freiwillige Sonderaufgabe: finden Sie ein Gegenbeispiel! (Hinweis: man kann Ideen aus der Lösung von Blatt 1, Aufg. 2c benutzen.)

Zeigen Sie:

2. Wenn $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$, so ist d ein größter gemeinsamer Teiler von a, b .

3. Ist der Integritätsring R ein Hauptidealring und ist d größter gemeinsamer Teiler von a, b , so gilt $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$.

Noch folgende kleine Korrektur in Aufgabe 3

Es wurde definiert:

Man nennt einen Integritätsring R *euklidisch*, wenn es eine Abbildung $d: R - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft $\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists q, r \in R: a = qb + r$ mit $r = 0$ oder $d(r) < d(b)$.

Richtiger wäre es, als Wertebereich der "Bewertungsabbildung" d \mathbb{N}_0 zuzulassen, da sonst das Beispiel der Polynomringe $K[X]$, bei denen man die Gradfunktion benutzt, nicht erfaßt ist. Noch richtiger wäre es, als Wertebereich eine *wohlgeordnete Menge*¹ M zuzulassen.

1 Eine geordnete Menge (M, \leq) heißt *wohlgeordnet*, wenn die Ordnung total ist ($\forall x, y \in M: (x \leq y) \vee (y \leq x)$) und jede nichtleere Teilmenge ein Minimum besitzt. Man kann zeigen, daß jede monoton fallende Folge (x_n) in einer wohlgeordneten Menge M stationär wird, d.h. wenn $\forall m, n \in \mathbb{N}: m \leq n \rightarrow x_n \leq x_m$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0: x_n = x_{n_0}$. (Übungsaufgabe!)