Determinantentheorie

Im folgenden sei K immer ein kommutativer Körper.

Zu einer Matrix $A \in M_n(K)$ definiert man $\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}$ und nennt det(A) *die Determinante von A* . Manchmal schreibt man auch $|A|$ statt det(A) .

Z.B. ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} \quad .$$

Weil die Summe auf der rechten Seite bei einer nxn-Matrix n! Summanden besitzt, wird man i.a. mit der Definitionsformel keine Determinanten ausrechnen.

Determinanten haben interessante Eigenschaften

1. det(E)=1
2. Sind $A, B \in M_n(K)$ so ist det(A)det(B)=det(AB).
Wenn A invertierbar ist so hat man $A^{-1} A = E$ und damit det(A)det(A^{-1})=det(E)=1;
daraus folgt sofort det(A) $\neq 0$ und $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$.

Also ist die Determinante ein Homomorphismus der Gruppe der invertierbaren nxn-Matrizen auf die multiplikative Gruppe des Grundkörpers und gleichzeitig mittels der Identifikation $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine multilineare alternierende Abbildung $K^n \times \ldots \times K^n \to K$.

3. det(A^t)=det(A) d.h. $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_\sigma a_{1\,\sigma(1)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$.

4. Sei A_{ij} die Matrix die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Setzt man $b_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ji}|$ und bildet die Matrix $B = (b_{ij})$ so gilt $AB = BA = (\det(A)) E$.

Letztere Gleichung ist so interessant daß ihr der nächste Abschnitt gewidmet ist:

Zunächst folgt sofort: ist det(A) $\neq 0$, so gilt $A\left(\frac{1}{\det(A)} B\right) = E$; also ist A invertierbar und

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B$ und man kann (theoretisch[1]) die Inverse mit Hilfe von Determinanten berechnen.

Wir halten insbesondere fest: ***A* ist genau dann invertierbar wenn det(*A*)≠0 .**

1 Praktisch sind das aber viel zu lange Rechnungen schon bei 4x4-Matrizen.

Betrachten wir noch einmal die Gleichung $(\det(A))E = A\,B$.
Multipliziert man die *k*-te Zeile von *A* mit der *k*-ten Spalte von *B* so ergibt sich
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j} b_{j\,k} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{k\,j} |A_{k\,j}|$. Man kann also die Determinante von *A* durch Auswertung von „Unterdeterminanten" berechnen und nennt die letzte Formel „Entwicklung der Determinante nach der *k*-ten Zeile".

Geht man dagegen aus von der Gleichung $(\det(A))E = B\,A$ und multipliziert die *k*-te Zeile von *B* mit der *k*-ten Spalte von *A* so erhält man $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} b_{k\,j} a_{j\,k} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j\,k} |A_{j\,k}|$ und spricht von der Berechnung der Determinante durch „Entwicklung nach der *k*-ten Spalte".

Offenbar kann man die Entwicklung nach der *k*-ten Spalte auch als Entwicklung der Determinante der transponierten Matrix nach der *k*-ten Zeile auffassen.

Entwickelt man z.B. die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ nach der zweiten Zeile, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Die Korrektheit dieser Gleichung läßt sich leicht durch Ausrechnen der 2x2-Determinanten der rechten Seite überprüfen.