

Blatt 12

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								Tutor	
1a	b	2a	b	3a	b	4a	b	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	1	1	8=160%	

Zur Bewertung dieses „Bonuszettels“:

Gehen wir von 11 regulären Übungszetteln aus und der dabei durchschnittlich erreichten Prozentzahl korrekt bearbeiteter Aufgaben, nennen wir sie P . Wenn Sie bei diesem Aufgabenzettel die Punktzahl p erreichen, ist Ihr Endergebnis $P + \frac{20p}{11}$.

1. Sei K ein Körper, $a_1, \dots, a_n \in K$.

Zu $x_1, \dots, x_n \in K$ setze man $x_{n+1} := \sum_{i=1}^n a_i x_i$ und betrachte die durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ gegebene lineare

Abbildung $K^n \rightarrow K^n$.

a) Welche Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basis von K^n besitzt diese Abbildung?

b) Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix.

2. Man definiere rekursiv

A) für $n \in \mathbb{N}_0$ $\binom{n}{0} := \binom{n}{n} := 1$ und weiter B) für $m \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ $\binom{n+1}{m+1} := \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}$.

Damit ist $\binom{n}{m}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ erklärt.

a) Man definiere jetzt für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right] := \frac{n!}{m!(n-m)!}$ und zeige, daß auch für $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right]$ die

A) und B) entsprechenden Gleichungen gelten.

b) Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ sei $\binom{n}{m}$ die Anzahl der m -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Man zeige, daß auch für $\binom{n}{m}$ die A) und B) entsprechenden Gleichungen gelten.

Bemerkung: damit hat man Induktionsbeweise für $\binom{n}{m} = \left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \binom{n}{m}$.

c) Freiwillige Sonderaufgabe: Bestimmen Sie die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer n -elementigen in eine m -elementige Menge (Nach Finden der Formel Induktionsbeweis).

Basis unendlichdimensionaler Vektorräume

Sei V ein (nicht notwendigerweise endlichdimensionaler) K -Vektorraum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist; sie heißt Erzeugendensystem, wenn jedes Element von V sich als (endliche) Linearkombination von Elementen in $\mathcal{B}$ schreiben läßt und sie heißt Basis, wenn beides der Fall ist.

3. Sei M eine Menge, K ein Körper und

$\mathcal{F}_K(M) := \{ f: M \rightarrow K \mid \exists L \subset M: L \text{ endlich und } \forall x \in M \setminus L: f(x) = 0 \}$, d.h. man betrachtet alle Abbildungen $M \rightarrow K$, die lediglich auf einer endlichen Teilmenge von M von Null verschiedene Werte besitzen. Durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$ ist auf $\mathcal{F}_K(M)$ eine K -Vektorraumstruktur erklärt.

Für $x \in M$ definiere man das Element $f_x \in \mathcal{F}_K(M)$ durch $f_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Man zeige:

a) die durch $x \rightarrow f_x$ gegebene Abbildung $M \rightarrow \mathcal{F}_K(M)$ ist injektiv.

b) die Menge $\{f_x \mid x \in M\}$ bildet eine Basis von $\mathcal{F}_K(M)$.

Bemerkung: Wegen a) kann man die Menge M mit der Teilmenge $\{f_x \mid x \in M\} \subset \mathcal{F}_K(M)$ identifizieren. Man kann also zu einer gegebenen Menge M einen Vektorraum konstruieren, der diese Menge als Basis besitzt. Man nennt $\mathcal{F}_K(M)$ den „freien K -Vektorraum zur Basis M “.

4. Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum mit der Basis $v_1, \dots, v_n$.

Wir definieren $\Lambda^2(V) := \{ \Phi: V^* \times V^* \rightarrow K \mid \Phi \text{ ist bilinear und alternierend} \}$ sowie die Abbildung $f: V \times V \rightarrow \Lambda^2(V)$ durch $(f(v, w))(\lambda, \mu) := \lambda(v)\mu(w) - \lambda(w)\mu(v)$ und setzen $v \wedge w := f(v, w)$.

Man zeige:

a) f ist bilinear und alternierend.

b) Die Elemente $v_i \wedge v_j, 1 \leq i < j \leq n$ bilden eine Basis von $\Lambda^2(V)$.

Bemerkung:

Die Menge $\{(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \mid i < j\}$ besitzt offenbar $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Elemente; also $\dim \Lambda^2(V) = \binom{n}{2}$.