

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							Tutor	
1a	1b	1c	2a	b	c	3	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	1	7	

Weihnachtsgeschenk: 6 Punkte=100% .

Alle Körper in den folgenden Aufgaben sind kommutativ, d.h. ihre Multiplikation ist kommutativ.

Aufgabe 1

Sei V ein K -Vektorraum.

Eine lineare Abbildung $\pi: V \rightarrow V$ heißt Projektion, wenn $\pi \circ \pi = \pi$.

a) Man gebe drei von der Identität verschiedene Projektionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an .

b) Sei $\pi: V \rightarrow V$ eine Projektion.

Man zeige $V = \ker \pi \oplus \operatorname{Im} \pi$, d.h. $V = \ker \pi + \operatorname{Im} \pi$ und $\{0\} = \ker \pi \cap \operatorname{Im} \pi$.

c) Man finde alle Projektionen $Z_3^2 \rightarrow Z_3^2$.

Aufgabe 2 Seien V, W K -Vektorräume.

Es sei $\operatorname{Hom}_K(V, W) := \{ \varphi \mid \varphi: V \rightarrow W \text{ linear} \}$.

Sind $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$, so definiert man für $x \in V$: $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$,
sowie $(\lambda \varphi)(x) := \lambda(\varphi(x))$. Auf diese Weise sind also Abbildungen $\varphi + \psi$ und $\lambda \varphi$ definiert.

a) Man zeige: $\varphi + \psi$ und $\lambda \varphi$ sind linear.

b) Mit den eben definierten Operationen ist $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ ein Vektorraum.

c) Sind $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ Basen von V bzw. W , so setze man für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j, k \leq n$

$$\varphi_i^j(v_k) := \delta_k^j w_i = \begin{cases} w_i & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

1 Man setzt $\delta_k^j := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Durch diese Vorgabe von Werten auf einer Basis von V werden offenbar für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ lineare Abbildungen $\varphi_i^j \in \text{Hom}_K(V, W)$ definiert. Man zeige, daß die φ_i^j eine Basis von $\text{Hom}_K(V, W)$ bilden. Der Vektorraum $\text{Hom}_K(V, W)$ ist also mn -dimensional.

Bemerkung:

Der Dualraum V^* ist offenbar gerade der Vektorraum $\text{Hom}_K(V, K)$.

Im eindimensionalen K -Vektorraum K wählt man üblicherweise die kanonische Basis $w_1 := 1$ und schreibt kurz φ^j statt φ_1^j . Die φ^j bilden dann die duale Basis zur Basis $v_1, \dots, v_n$.

Aufgabe 3

Man erinnere sich an die Definition der dualen Abbildung:

Ist $\Phi: U \rightarrow V$ linear, so definiert man die „duale Abbildung“ $\Phi^*: V^* \rightarrow U^*$ durch $(\Phi^* \varphi) := \varphi \circ \Phi$.

Man erinnere sich an die Definition von Exaktheit: Eine Sequenz von linearen Abbildungen

$U \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} W$ heißt exakt an der Stelle V , wenn $\ker \Psi = \text{Im } \Phi$.

Sei nun $U \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} W$ exakt an der Stelle V .

Man zeige $W^* \xrightarrow{\Psi^*} V^* \xrightarrow{\Phi^*} U^*$ ist exakt an der Stelle V^* .

Aufgabe 4 (Freiwillige Sonderaufgabe wg. Induktionsbeweis)

Sei $0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Vektorraumhomomorphismen.

Man kann diese offenbar (wieso?) zerlegen in eine Folge von kurzen exakten Sequenzen:

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \text{Im } \varphi_2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Im } \varphi_2 = \ker \varphi_3 \xrightarrow{i_3} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} \text{Im } \varphi_3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Im } \varphi_3 = \ker \varphi_4 \xrightarrow{i_4} V_4 \xrightarrow{\varphi_4} \text{Im } \varphi_4 \rightarrow 0$$

...

$$0 \rightarrow \text{Im } \varphi_{n-2} = \ker \varphi_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \text{Im } \varphi_{n-1} = V_n \rightarrow 0,$$

wobei $i_k: \text{Im } \varphi_{k-1} = \ker \varphi_k \rightarrow V_k$ einfach die Einbettung des Unterraums $\text{Im } \varphi_{k-1} = \ker \varphi_k$ in den Raum V_k bedeute, also $i_k(x) = x$ für $x \in \text{Im } \varphi_{k-1} = \ker \varphi_k$. Damit ist i_k trivialerweise injektiv.

Wir wissen bereits, daß für eine exakte Sequenz $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ gilt:

$$\dim U - \dim V + \dim W = 0.$$

Man zeige durch Induktion: $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0$.

Hinweis: dies ist ganz einfach.