

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen					Tutor	
1	2	3	4	5	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	5	

Aufgabe 1

Angeregt durch eine Frage im Plenum:

Man betrachte die additiv geschriebenen Gruppen $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, wobei die Gruppenoperation jeweils die Addition modulo 2 bzw. modulo 4 ist, und die Produktgruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Offenbar gibt es 24 verschiedene bijektive Abbildungen zwischen $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Man zeige, daß keine von ihnen ein Gruppenisomorphismus ist¹.

(Dies bedeutet: die beiden Gruppen sind in ihrer Struktur wirklich verschieden.)

Aufgabe 2

Eine Gruppe G heißt zyklisch, wenn es ein Element $g \in G$ gibt und für jedes Element $x \in G$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{Z}$ so, daß $x = g^n$, d.h. jedes Element von G läßt sich als Potenz von g schreiben².

Sei nun G zyklisch.

a) Zeigen Sie: Jede Untergruppe von G ist zyklisch.

Freiwillige Sonderaufgabe:

b) Sei $|G| = k \cdot m$. Finden Sie zwei Untergruppen H_1 und H_2 von G so, daß Sie einen Gruppenisomorphismus $\varphi: G \rightarrow H_1 \times H_2$ angeben können.

Aufgabe 3

Sei $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ ein Gruppenhomomorphismus und $H_2 \subset G_2$ sei ein Normalteiler in G_2 .

Man zeige, daß dann $H_1 := \varphi^{-1}(H_2)$ ein Normalteiler in G_1 ist.

¹ Dazu muß man nicht jede einzelne Abbildung untersuchen!

² Man nennt dann g ein erzeugendes Element oder einen Erzeuger der Gruppe G , oder sagt auch „ G wird von g erzeugt“.

Aufgabe 4

Man betrachte die Permutationsgruppe $G := \mathfrak{S}_3$.

Man zeige, daß $H := \{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\}$ eine Untergruppe von G , aber kein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5

Es sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe, und die Menge der Linksnebenklassen G/H besitze nur 2 Elemente. Man zeige, daß dann H ein Normalteiler sein muß.

Aufgabe 6 (Freiwillige Sonderaufgabe)

G sein eine endliche Gruppe mit n Elementen. Man nehme eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N}_n \rightarrow G$.

Durch $x \mapsto (i \mapsto f^{-1}(x \cdot (f(i))))$ wird eine Abbildung $\varphi: G \rightarrow \mathfrak{S}_n$ definiert³.

Man zeige: φ ist ein Monomorphismus.

Bemerkung: Die Untergruppe $\varphi(G) \subset \mathfrak{S}_n$ ist dann offenbar isomorph zu G . Man kann also sagen:

Jede endliche Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer Permutationsgruppe. Dies unterstreicht die Wichtigkeit der Permutationsgruppen.

³ Zu gegebenem $x \in G$ entsteht die zugehörige Permutation $\sigma = \varphi(x)$ also durch $\sigma(i) = f^{-1}(x \cdot (f(i)))$