

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						Tutor		
1a	1b	2c	1d	1e	2	Summe	bearbeitet	korrekt
1	1	1	1	1	1	6		

Aufgabe 1

Man erinnere sich an die Definition der Permutationsgruppe der Ordnung n :

$\mathfrak{S}_n := \{ \sigma : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n \mid \sigma \text{ bijektiv} \}$. Für $1 \leq i < j \leq n$ hatten wir die Transposition $\pi_{i,j} \in \mathfrak{S}_n$ definiert

durch $\pi_{i,j}(k) = \begin{cases} j & \text{falls } k=i \\ i & \text{falls } k=j \\ k & \text{sonst} \end{cases}$.

- Stellen Sie $\sigma = (3, 5, 6, 2, 7, 1, 4) \in \mathfrak{S}_7$ als Produkt von Transpositionen dar. (Probe!)
- Stellen Sie die Transposition $\pi_{3,7} \in \mathfrak{S}_7$ als Produkt von Transpositionen der Form $\pi_{i,j}$ mit $j=i+1$ dar. (Probe!)
- Die Inversionszahl $N(\sigma)$ einer Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ist definiert als die Elementzahl der Menge $\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}$. Berechnen Sie die Inversionszahl von $\sigma = (3, 5, 6, 2, 7, 1, 4) \in \mathfrak{S}_7$.
- Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation mit der Inversionszahl $N(\sigma)$. Berechnen Sie die Inversionszahl $N(\sigma \circ \pi_{1,2})$.
- Begründen Sie, warum die Inverse einer geraden Permutation gerade ist.
- Freiwillige Sonderaufgabe: Finden Sie alle Permutationen in $\mathfrak{S}_4$ mit geraden/ungeraden Inversionszahlen und prüfen Sie, daß es sich um gerade/ungerade Permutationen handelt.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Für $A, B \subset M$ setze man $A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ¹.

Zeigen Sie: Mit dieser Operation ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine Gruppe.

Fertigen Sie für die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ die Gruppentafel an.

Aufgabe 3 Freiwillige Sonderaufgabe

Sei G eine nichtleere Menge, $\Phi: G \times G \rightarrow G$, $\Phi(a, b) = ab$ eine assoziative Verknüpfung auf G .

Ein Element $e \in G$ heißt Linkseins (bezüglich der Verknüpfung Φ), wenn $\forall x \in G: ex = x$.

Ein Element $y \in G$ heißt linksinvers bzgl. e zu x , wenn $yx = e$.

Ein Element $z \in G$ heißt rechtsinvers bzgl. e zu x , wenn $xz = e$.

Ein Element $f \in G$ heißt Rechtseins, wenn $\forall x \in G: xf = x$.

G besitze eine Linkseins und zu jedem $x \in G$ existiere bzgl. dieser Linkseins ein linksinverses Element.

Man zeige:

- Ist $x \in G$, so ist jedes Linksinverse zu x bzgl. e auch rechtsinvers.
- Jede Linkseins von G ist auch Rechtseins.
- Es gibt genau ein neutrales Element in $e \in G$, d.h. genau ein Element, welches Linkseins und Rechtseins ist.
- Es gibt zu jedem $x \in G$ ein eindeutig bestimmtes inverses Element, also ein Element x^{-1} für welches $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, wobei e das lt. c) eindeutig bestimmte neutrale Element von G ist.

Man kann also den Begriff „Gruppe“ mit schwächeren Axiomen begründen, als wir es in der Vorlesung getan haben.

¹ Diese Mengenverknüpfung bezeichnet man auch als „symmetrische Differenz“.