

Blatt 2

Namen						Gruppe
1a	b	c	2a	b	3	Summe
1	1	1	1	1	1	6

Aufgabe 1

Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt Äquivalenzrelation auf M , wenn gilt:

- | | |
|--|----------------|
| $\forall x \in M : xRx$ | Reflexivität |
| $\forall x, y \in M : xRy \rightarrow yRx$ | Symmetrie |
| $\forall x, y, z \in M : (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$ | Transitivität. |

(Erinnern Sie sich, daß die Schreibweise xRy bedeutet, daß $(x, y) \in R$.)

Zu jedem $x \in M$ definiert man die Menge $\bar{x} := \{y \in M \mid yRx\}$ und nennt $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von x .

a) Sei $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation.

Zeigen Sie, daß die Aussagen $\bar{x} = \bar{y}$ und xRy äquivalent sind.

Zeigen Sie auch, daß $\neg(xRy)$ äquivalent ist zu $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

b) Sei $M = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Finden Sie alle Äquivalenzrelationen auf M und schreiben Sie diese Mengen vollständig hin.

c) Sei M eine Menge. Ein Axiom der Mengenlehre besagt: Man kann die Vereinigungsmenge aller Elemente von M bilden. Diese Vereinigungsmenge bezeichnet man als $\bigcup M$. Formal bedeutet dies: $\bigcup M = \{x \mid \exists y \in M : x \in y\}$. Beispielsweise ist $\bigcup \{A, B, C\} = A \cup B \cup C$.

M sei eine Menge deren sämtliche Elemente paarweise disjunkt sind, d.h.

$\forall x, y \in M : x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset$. Man setze nun $N := \bigcup M$, sowie $R := \{(a, b) \in N \times N \mid \exists x \in M : a, b \in x\}$.

Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation.

Umgangssprachlich bedeutet dies: Gegeben sei eine Menge von Dingen, die in getrennten Haufen liegen. (Nennt man die Menge der Haufen M , so ist die Menge der Dinge in allen Haufen gerade $\bigcup M$.) Man erhält eine Äquivalenzrelation, indem man zwei Dinge im selben Haufen für äquivalent erklärt. Jeder Haufen bildet dann eine Äquivalenzklasse.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt Ordnung(srelation) auf M , wenn gilt:

$\forall x \in M : xRx$	Reflexivität
$\forall x, y \in M : ((xRy \wedge yRx) \rightarrow (x = y))$	Identitivität
$\forall x, y, z \in M : (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$	Transitivität.

Gilt zusätzlich noch $\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$, so heißt die Ordnung total.

Eine totale Ordnung R auf M heißt Wohlordnung, wenn für jede nicht-leere Teilmenge $K \subset M$ gilt:
 $\exists x \in K \forall y \in K : xRy$ ¹.

- a) Sei $M = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Finden Sie alle Ordnungsrelationen auf M und schreiben Sie diese Teilmengen von $M \times M$ vollständig hin. Welche dieser Ordnungen sind total?
- b) Zeigen Sie: auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ ² ist durch: $m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = m + k$ eine totale Ordnung gegeben.
- c) freiwillige Sonderaufgabe: beweisen Sie, daß es sich bei der obigen „natürlichen Ordnung“ auf $\mathbb{N}_0$ um eine Wohlordnung handelt³.

Aufgabe 3

Seien M, N Mengen. Eine Relation $F \subset M \times N$ heißt „Funktion“, wenn gilt:

$$\forall (a, b), (c, d) \in F : ((a = c) \Rightarrow (b = d))$$

Seien nun die dreielementige Menge $M = \{a, b, c\}$ und die zweielementige Menge $N = \{1, 2\}$ gegeben.

Schreiben Sie alle Teilmengen $F \subset M \times N$ hin, welche Funktionen sind!

Hinweis: Auch $\emptyset$ erfüllt die Definitionsbedingung für „Funktion“ und ist daher eine von ihnen.

¹ dies bedeutet: jede Teilmenge von K besitzt ein bezüglich der Ordnung kleinstes Element.

² Bei uns: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

³ Hinweis: Man muß letztlich einen Induktionsbeweis führen. Mittels Induktion beweist man Aussagen der Art:
 $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$. Sie müssen also die Behauptung irgendwie in diese Form überführen. Versuchen Sie ggf. im Internet oder der Bibliothek einen Beweis zu finden.