

Lineare Algebra 1, WS09/10
M. Hortmann

Blatt 1

1a	b	2	3	4	Summe
0.5	0.5	1	1	1	4

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß

- a) $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
b) $((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge C)$

Tautologien sind.

Aufgabe 2

Seien A, B Aussagen. Die Aussagenverknüpfung $A \otimes B$ sei durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \otimes B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Man versuche, Aussagenverknüpfungen von A und B zu finden, die äquivalent sind zu $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ und in denen ausschließlich die Operation $\otimes$ benutzt wird.

(Hinweis: Beispielsweise hat $A \otimes A$ dieselbe Wahrheitstafel wie $\neg A$.)

Aufgabe 3

Finden Sie eine Verknüpfung der Aussagen A, B, C mit Hilfe der Operationen $\neg, \wedge, \vee$, so daß sich folgende Wahrheitstafel ergibt:

A	B	C	?
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Bemerkung 1: Die Einträge in der letzten Spalte wurden zufällig gewählt!

Bemerkung 2: Man kann die obige Tabelle als „Wahrheitsfunktion“ interpretieren. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß jede Wahrheitsfunktion mit Hilfe von $\neg, \wedge, \vee$ ausgedrückt werden kann, nach 2) sogar ausschließlich mit Hilfe von $\otimes$ (NOR; in der Vorlesung wurde NAND behandelt.).

Aufgabe 4

Die Zahlen $n=0, 1, 2, \dots, 7$ lassen sich darstellen als $n = A_0 + 2 \cdot A_1 + 4 \cdot A_2$ mit eindeutig bestimmten Elementen $A_0, A_1, A_2 \in \{0, 1\}$.

Für $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ reicht eine „zweistellige“ Darstellung: $n_1 = A_0 + 2 \cdot A_1$, $n_2 = B_0 + 2 \cdot B_1$.

Man bilde nun die Summe $n_1 + n_2 := n_3 = C_0 + 2 \cdot C_1 + 4 \cdot C_2$.

Identifizieren Sie nun die Zahl 0 mit dem Wahrheitswert f und die Zahl 1 mit dem Wahrheitswert w , und berechnen Sie die Wahrheitstabellen für C_0, C_1, C_2 in Abhängigkeit von A_0, A_1, B_0, B_1 .

Drücken Sie dann C_0, C_1, C_2 durch Verknüpfungen von A_0, A_1, B_0, B_1 mittels $\neg, \wedge, \vee$ aus.

(Beispielsweise ergibt sich $C_0 \leftrightarrow ((A_0 \wedge (\neg B_0)) \vee ((\neg A_0) \wedge B_0))$.)

Bemerkung: Letztlich geht um die Addition zweistelliger Zahlen im Stellensystem zur Basis 2:

	A_1	A_0
+	B_1	B_0
C_2	C_1	C_0

, zum Beispiel

	1	1
+	0	1
1	0	0

Die Aufgabe soll zeigen, wie im Prinzip die Addition natürlicher Zahlen mittels logischer Operationen erfolgen kann.