

Blatt 4 Aufgabe 1b)

b) Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so wurde definiert $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$, wobei $f(\gamma(t)) \gamma'(t)$

ein Produkt in $\mathbb{C}$ ist. Ein Polygonzug $z_0, \dots, z_n$ auf γ sei gegeben durch eine Zerlegung

$a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit $z_i = \gamma(t_i)$.

Ein solcher Polygonzug stellt in natürlicher Weise selbst einen stückweise stetig differenzierbaren Weg η dar, der für eine hinreichend feine Zerlegung auch in G liegt, also $\eta: [a, b] \rightarrow G$, wobei man für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ $\eta(t) := \gamma(t_{i-1}) + (t - t_{i-1})(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$ setzt.

Man zeige: Ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es einen Polygonzug $z_0, \dots, z_n$ auf γ , so daß

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\eta} f(z) dz \right| < \epsilon.$$

Das Integral $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ wird approximiert durch eine Riemann Summe,

d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit $z_i = \gamma(t_i)$, so daß

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_i)) \gamma'(t_i) (t_{i+1} - t_i) \right| < \epsilon.$$

Zur Verkürzung schreiben wir $z_i = \gamma(t_i)$.

Die Zerlegung kann so fein gewählt werden, daß $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) - \gamma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)| < \epsilon |t_{i+1} - t_i|$.

(Dahinter steckt auch ein Kompaktheitsargument wie in 1a, da die Abschätzung ja bei vorgegebenem ϵ gleichmäßig auf ganz $[a, b]$ für $|s - t| < \delta$ gilt.) Es ergibt sich via Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) (z_{i+1} - z_i) \right| &= \\ \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_{i-1})) \gamma'(t_{i-1}) (t_i - t_{i-1}) + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_{i-1})) \gamma'(t_{i-1}) (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_{i-1})) (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| &\leq \\ \epsilon + \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \epsilon (b - a) &= \epsilon \cdot \text{Konstante} \end{aligned}$$

Wir können also von vornherein sagen: zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gibt es einen Polygonzug, so daß

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) (z_{i+1} - z_i) \right| < \epsilon$$

und hätten auch direkt über solche „komplexen“ Riemann Summen das komplexe Linienintegral definieren können. Jedenfalls sind wir jetzt das Integral $\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ erstmal los.

Die obige Zerlegung des Weges γ kann auch so fein angenommen werden, daß die Verbindungsstrecken $[z_{i-1}, z_i]$ ganz in G liegen. Die Länge dieser Segmente sei auch so klein,

daß mit einem gleichmäßigen Stetigkeitsargument für f für jeden Punkt $z \in [z_{i-1}, z_i]$ gilt:
 $|f(z) - f(z_{i-1})| < \epsilon$.

Nennen wir nun den durch $z_0, \dots, z_n$ gegebenen Polygonzug P , so läßt sich schreiben:

$$\int_P f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[z_i, z_{i+1}]} f(z) dz.$$

Damit haben wir die Gesamtabschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_\gamma f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| \leq \\ & \left| \int_\gamma f(z) dz - \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i) \right| + \left| \int_P f(z) dz - \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i) \right| \leq \\ & \epsilon + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[z_i, z_{i+1}]} (f(z) - f(z_i)) dz \right| \leq \epsilon + \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon |z_{i+1} - z_i| = \epsilon \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \right) \end{aligned}$$

Dabei ist die Abschätzung $\left| \int_{[z_i, z_{i+1}]} (f(z) - f(z_i)) dz \right| \leq \epsilon |z_{i+1} - z_i|$ wieder die Standardabschätzung: Betrag Wegintegral kleinergleich Weglänge mal Supremum der Beträge der Funktionswerte auf dem Weg.

Die letzte Summe am Ende der Abschätzungen ist aber die Länge des Polygonzugs.

Wir können bei unserer Zerlegung davon ausgehen, daß diese sich nur um ϵ von der Länge der Kurve γ unterscheidet, also haben wir schließlich $\dots \leq \epsilon(1 + \epsilon + l(\gamma)) \leq \epsilon(2 + l(\gamma))$, da oBdA $\epsilon < 1$.