

Blatt 9

1d) Sei $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ eine glatte geschlossene Kurve und $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ die übliche Parametrisierung der S^1 , also $c(t) = \cos t + i \sin t = \exp it$; $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ sei eine glatte Abbildung und es gelte $\gamma = f \circ c^{-1}$.

Zeigen Sie, daß $n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$.

Bemerkung: wir hatten diesen Ausdruck früher schon einmal als „Windungszahl von γ (um Null)“ bezeichnet.

Das komplexe Linienintegral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ wird wie üblich berechnet als $\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$, während

in 1c) die Gleichung $n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{df}{f}$ abgeleitet wurde. Um die 1-Form $\frac{df}{f}$ auf der 1-

dimensionalen Mannigfaltigkeit S^1 zu integrieren, nehmen wir die (orientierungserhaltende)

Parametrisierung $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, $c(t) = \cos t + i \sin t = \exp it$ und berechnen

$$c^* \left(\frac{df}{f} \right) = c^* \left(\frac{1}{f} df \right) = \frac{d(f \circ c)}{f \circ c} = \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma' dt}{\gamma} = \frac{\gamma'}{\gamma} dt.$$

Es ist also $\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{df}{f} = \int_0^{2\pi} c^* \left(\frac{df}{f} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$, was zu beweisen war.

Daß eine Gleichung wie $c^* df = d(c^* f) = d(f \circ c)$ legitim ist, läßt sich auch reell nachrechnen:

Sei $f = f_1 + if_2$, also aufgefaßt als komplexwertige Funktion zweier reeller Variabler.

Dann ist definitionsgemäß $df = df_1 + i df_2$, sowie

$$c^* df = c^* df_1 + i c^* df_2 = d(f_1 \circ c) + i d(f_2 \circ c) = d((f_1 \circ c) + i(f_2 \circ c)) = d((f_1 + i f_2) \circ c) = d(f \circ c)$$

Dabei wurde benutzt, daß der Pullbackoperator mit der äußeren Ableitung kommutiert, daß also

hier z.B. $c^*(df_1) = d(c^* f_1) = d(f_1 \circ c)$.

Der Pullbackoperator hat sowieso alle algebraisch schönen Eigenschaften:

Er kommutiert mit Dachprodukten (Funktionen sind 0-Formen und deshalb ist die Multiplikation einer Form mit einer Funktion, oder das Produkt von 2 Funktionen auch ein Dachprodukt), er kommutiert mit Summen und mit der äußeren Ableitung. (Er ist ein Morphismus „differentieller Algebren“.)

Diese Eigenschaften sind allesamt bewiesen worden, und der Beweis ist straightforward; es wird direkt die Definitionseigenschaft $(\varphi^* \omega)(p)(\xi_p^1, \dots, \xi_p^k) := \omega((\varphi(p)))(\varphi_* \xi_p^1, \dots, \varphi_* \xi_p^k)$ benutzt.

1 Machen Sie sich klar, daß f als Abbildung $S^1 \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ schon eindeutig durch γ bestimmt ist. Nur die Glattheit von f im Punkt 1 bedeutet eine Zusatzforderung an γ , die man auch so hätte ausdrücken können: Sei I ein offenes Intervall mit $[0, 2\pi] \subset I$ und $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ eine glatte Abbildung mit $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, falls $t_2 - t_1 = 2\pi$.