

Blatt 10

Aufg. 1

Der Induktionsschluß war nicht richtig klar:

Beim Induktionsanfang wurde gezeigt, daß $f_1' = f_2$.

Gehen wir jetzt aus von $f_{n-1}' = (n-1)f_n$.

Es ist (vgl. Rechnung beim Induktionsanfang, auf Hauptnenner bringen)

$$\int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta - \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} d\zeta = (z-z_0) \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)} d\zeta, \text{ also } (*)$$
$$f_n(z) - f_n(z_0) = \left(\int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} d\zeta - \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n} d\zeta \right) + (z-z_0) \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)} d\zeta$$

Damit haben wir die Stetigkeit von f_n in z_0 , denn der Ausdruck in der Klammer rechts vom Gleichheitszeichen ist ja gleich $\int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)}{(\zeta-z)^{n-1}} d\zeta - \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)}{(\zeta-z_0)^{n-1}} d\zeta$ und dies ist stetig in z_0 , nach Induktionsvoraussetzung, aber ausgehend von $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ statt von

$$\varphi(\zeta), \text{ während der Ausdruck } (z-z_0) \int_{\partial G} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)} d\zeta \text{ sowieso stetig in } z_0 \text{ ist.}$$

Jetzt dividiert man in (*) durch $z-z_0$ und geht zum Grenzwert über:

Nach Induktionsvoraussetzung – wieder angewandt mit $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ – konvergiert der Ausdruck in den Klammern gegen $(n-1)f_{n+1}(z_0)$ ¹, während der Ausdruck rechts von den Klammern gegen $f_{n+1}(z_0)$ konvergiert. Insgesamt dann also

$$f_n'(z_0) = (n-1)f_{n+1}(z_0) + f_{n+1}(z_0) = n f_{n+1}(z_0).$$

Nachdem der Induktionsanfang in der Vorlesung gezeigt war, sollte die obige Lösung möglich sein. In der Übung könnte man ja auch den Ansatz „Differentiation unter dem Integral“ ansprechen.

Aufg. 4

Die Formel stimmt so, wie sie in der Aufgabe steht.

Bei der Berechnung des Integrals erhielten wir gestern den Ausdruck

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi$$

$$\text{Dies ist gleich } \frac{1}{2^{2n}} \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} 2\pi = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n \prod_{i=1}^n 2i} 2\pi.$$

Wir haben gestern nicht gesehen, daß $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n} = \prod_{i=1}^n (2i-1)$ ist.

¹ Setzt man $\tilde{f}_n(z) := \int_{\partial G} \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta$, so ist offensichtlich $\tilde{f}_n(z_0) = f_{n+1}(z_0)$.

Dies sieht man am einfachsten durch Induktion:

Induktionsanfang: $\frac{2}{2} = 2 - 1$

Induktionsschluß:

$$\frac{2(n+1)(2n+1)\cdots(n+2)}{2^{n+1}} = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n} \cdot \frac{2(n+1)(2n+1)}{2 \cdot (n+1)} =$$

$$\left(\prod_{i=1}^n (2i-1) \right) \cdot 2(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} (2i-1)$$