Definitionen und Sätze zu zusammenhängenden Mengen

Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{O})$ heißt *unzusammenhängend*, wenn *M* sich als Vereinigung zweier nicht-leerer disjunkter offener Teilmengen schreiben läßt. Entsprechend heißt er *zusammenhängend* , wenn er nicht unzusammenhängend ist.

Eine Teilmenge *L* eines topologischen Raums $(M, \mathcal{O})$ heißt *unzusammenhängend*, wenn sie sich durch zwei disjunkte offene Teilmengen von *M* überdecken läßt[1], welche jeweils einen nicht-leeren Schnitt mit *L* besitzen, und *zusammenhängend*, wenn sie nicht unzusammenhängend ist.
L ist genau dann zusammenhängend, wenn *L* als topologischer Raum, versehen mit der Relativtopologie, zusammenhängend ist.

Satz Ist $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, so ist das abgeschlossene Intervall $I=[a,b]$ zusammenhängend.

Beweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß Intervalle in $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend sind. Es muß also an der Vollständigkeit liegen, wenn es bei Intervallen in $\mathbb{R}$ anders ist. Also wird man einige „Epsilons“ investieren müssen.

Wäre $I=[a,b]$unzusammenhängend, so gäbe es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}$ mit $U \cap I \neq \emptyset$, $V \cap I \neq \emptyset$ und $I \subset U \cup V$. Sei oBdA $a \in U$. Wir werden versuchen zu zeigen, daß dann $I=[a,b] \subset U$ gelten muß, daher $I \cap V = \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Dazu bilden wir die Menge $J := \{x \in I \mid [a, x] \subset U\}$. J ist durch *b* nach oben beschränkt, also existiert $c = \sup J$, und wir wissen zunächst nur, daß $a \leq c \leq b$.

Wir zeigen jetzt, daß $[a, c] \subset U$:
Dies ist trivial, wenn $c=a$.
Ist $a < c$, und betrachten wir ein beliebiges $d \in I$ mit $a < d < c$, so kann *d* nicht obere Schranke von *J* sein. Daher gibt es ein Element $e \in J$ mit $d < e \leq c$. Das heißt aber $[a, e] \subset U$, also auch $[a, d] \subset U$, und zwar für jedes *d* mit $a < d < c$. Daher muß für das halboffene Intervall $[a, c[$ gelten: $[a, c[\subset U$. Jetzt ist nur noch die Frage, ob auch $c \in U$. Wäre das nicht der Fall, so müßte $c \in V$ gelten. Da *V* offen ist, müßten auch Elemente des Intervalls *I* , die links von *c* liegen, zu V gehören, aber das kann ja wegen $[a, c[\subset U$ nicht sein. Also ist $[a, c] \in U$.

Insbesondere ist $c \in U$. Damit hat man $]c-\epsilon, c+\epsilon[\subset U$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$.
Wäre $c<b$, so könnte man ϵ so klein wählen, daß $]c-\epsilon, c+\epsilon[\subset U \cap I$. Es würde folgen, daß $[a, c+\epsilon/2] \subset U$, also $c+\epsilon/2 \in J$ so daß *c* keine obere Schranke der Menge *J* sein könnte.

Daher folgt $c=b$ und damit $[a, b] \subset U$, und wir haben den angestrebten Widerspruch.

Bemerkung: Man überlegt sich leicht: Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall genau dann, wenn gilt: Sind $a, b \in I, a < b$, so ist $[a, b] \subset I$. Damit ergibt sich leicht der folgende Satz
Satz: Ist $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, so ist *I* ein Intervall.

Beweis:

---

1 d.h. wenn es $U, V \in \mathcal{O}$ gibt mit $L \subset U \cup V$

Wäre I kein Intervall, so folgt aus obiger Bemerkung die Existenz von $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<c<b$, $a,b\in I$, $c\notin I$. Setzt man jetzt $U:=]-\infty,c[$, $V:=]c,\infty[$, so ist $a\in I\cap U, b\in I\cap V$ und $I\subset U\cup V$, d.h. I wäre nicht zusammenhängend.

Satz
Ist $f:M\to N$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $L\subset M$ zusammenhängend, so ist auch die Bildmenge $f(L)$ zusammenhängend.

Beweis:
Wäre $f(L)$ unzusammenhängend, so gäbe es nichtleere offene Teilmengen $V_1, V_2\subset N$ mit $f(L)\subset V_1\cup V_2$, $f(L)\cap V_1\neq\emptyset$, $f(L)\cap V_2\neq\emptyset$. Es folgt dann $L\subset f^{-1}(f(L))\subset f^{-1}(V_1\cup V_2)=f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)$. Die beiden Mengen $U_1:=f^{-1}(V_1)$ und $U_2:=f^{-1}(V_2)$ sind wegen der Stetigkeit von *f* offen, sie überdecken L, und es gilt $U_1\cap U_2=f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)=f^{-1}(V_1\cap V_2)=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$. Außerdem gilt $f(U_1\cap L)=f\left(f^{-1}(V_1)\cap L\right)\supset f\left(f^{-1}(V_1)\right)\cap f(L)\supset V_1\cap f(L)$
Es ist $\emptyset\neq f(L)\cap V_1$. Betrachten wir also ein Element $y\in f(L)\cap V_1$. Offenbar gibt es ein $x\in L$ mit $f(x)=y$. Weil $f(x)\in V_1$ ist $x\in f^{-1}(V_1)=U_1$, also $x\in L\cap U_1$ und daher ist $U_1\cap L\neq\emptyset$. Mit derselben Begründung ist auch $U_1\cap L\neq\emptyset$.
Damit wäre auch L unzusammenhängend, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Korollar (Zwischenwertsatz):
Sei M ein zusammenhängender topologischer Raum, $f:M\to\mathbb{R}$ stetig.
Sind dann $x,y\in M$, $f(x)<0<f(y)$, so besitzt *f* eine Nullstelle, d.h. es gibt es ein $z\in M$ mit $f(z)=0$.

Beweis: $f(M)\subset\mathbb{R}$ ist zusammenhängend, also ein Intervall. Damit ist $[f(x),f(y)]\subset f(M)$, also $0\in f(M)$.

Bemerkung:
Schon der Beweis, daß [*a,b*] zusammenhängend ist, war ja nicht ganz untrivial. Umso schwieriger müßte der entsprechende Nachweis bei komplizierteren Mengen in höherdimensionalen Räumen sein, wenn nicht der folgende Begriff des *Wegzusammenhangs* die Sache erleichterte:

Definition:
Eine Teilmenge L eines topologischen Raums M heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu zwei beliebigen Punkten $x,y\in L$ einen Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt, der ganz in L verläuft, also eine **stetige** Abbildung $c:[a,b]\to M$ mit $c(a)=x, c(b)=y,\ \forall t\in[a,b]:c(t)\in L$

Satz:
Ist eine Teilmenge L eines topologischen Raums M wegzusammenhängend, so ist sie zusammenhängend.

Beweis:
Wir führen die Annahme, daß L nicht zusammenhängend ist, zum Widerspruch.
Wäre L nicht zusammenhängend, so gäbe es offene Teilmengen U,V in M mit $U\cap L\neq\emptyset\neq V\cap L$, $L\subset U\cup V$. Wir wählen $x\in U\cap L,\ y\in V\cap L$, und einen Weg, der *x,y* verbindet.
Da das Parameterintervall [*a,b*] zusammenhängend ist, ist auch die Bildmenge $K:=c([a,b])\subset L$ zusammenhängend. Nun ist $x\in K\cap U,\ y\in K\cap V$ und außerdem $K\subset L\subset U\cup V$, was offenbar

bedeutet, daß K unzusammenhängend ist. Damit haben wir den gesuchten Widerspruch.

Satz: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so ist X wegzusammenhängend.

Beweis:
Wir gehen aus von einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$ und bilden die Menge
$L := \left\{ x \in X \,\middle|\, \text{Es gibt einen Weg mit Anfangspunkt } x_0 \text{ und Endpunkt } x \right\}$.

Wenn wir $L=X$ zeigen können, sind wir fertig.
Dazu weisen wir nach, daß L und $X-L$ beide offen sind. Da $x_0 \in L$, ist L nicht leer. Da $X = L \cup (X-L)$, andererseits X zusammenhängend ist, muß X-L leer sein.

Zur Offenheit von L :
Sei $y_0 \in L \subset X$. Wir müssen zeigen, daß es eine offene Kugel um y_0 gibt, die ganz in L liegt. Wegen der Offenheit von X gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $U_\epsilon(y_0) \subset X$. Ist jetzt $x \in U_\epsilon(y_0)$, so können wir einen stetigen Weg von x_0 nach x finden, indem wir zunächst von x_0 nach y_0 laufen, was nach Definition von L möglich ist, anschließend weiter auf der Verbindungsstrecke von y_0 nach x, die ganz innerhalb $U_\epsilon(y_0)$ und damit in X verläuft. Damit ist auch $x \in L$ und, da x beliebig in $U_\epsilon(y_0)$ gewählt war, $U_\epsilon(y_0) \subset L$.

Zur Offenheit von X-L :
Wäre $X - L = \emptyset$, so wären wir fertig.
Gäbe es dageben einen Punkt $y_0 \in X - L$, so gäbe es keinen stetigen Weg innerhalb X von x_0 zu y_0 . Wegen der Offenheit von X gibt es eine ϵ - Kugel um y_0 , die ganz innerhalb X liegt. Ist x ein Punkt in dieser ϵ - Kugel um y_0 und gäbe es einen stetigen Weg innerhalb X von x_0 zu x , so könnten wir auf der Verbindungsstrecke von x zum Kugelmittelpunkt y_0 laufen, hätten also doch einen stetigen Weg von x_0 nach y_0 , der innerhalb X verläuft. Also muß x in X-L liegen, und damit die gesamte obige ϵ - Kugel um y_0 . Daher ist X-L offen.