

Probeklausur Analysis I/II

Name (Pseudonym):																																							
1a	b	2a	b	3a	b	c	4a	b	c	d	e	f	5a	b	c	6a	b	c	d	e	7a	b	8a	b	c	9a	b	10	11	12	b	c	13	b	14	15	b	16	

1. Sei $f: M \rightarrow N$ und $V \subset N$. Man zeige

a) Man zeige $f(f^{-1}(V)) \subset V$

b) Man gebe ein Beispiel, warum die umgekehrte Inklusion i.a. nicht gilt.

2.

a) Was ist eine total geordnete Menge?

b) Sei M eine total geordnete Menge, $L \subset M$, $a \in M$. Wann heißt a „Supremum von L “?

3.

a) Wann heißt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (M, d) konvergent?

b) Wann heißt sie Cauchyfolge?

c) Zeigen Sie, daß in einem metrischen Raum eine konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

4.

a) Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raums offen?

b) Zeigen Sie, daß eine einpunktige Teilmenge eines metrischen Raums abgeschlossen ist.

c) Was ist ein Hausdorffraum?

d) Warum ist ein metrischer Raum ein Hausdorffraum?

e) Was ist ein Banachraum?

f) Geben Sie ein Beispiel eines nicht-endlichdimensionalen Banachraums.

5.

a) Was heißt kompakt?

b) Warum sind Bildmengen kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen kompakt?

c) Warum sind kompakte Mengen in einem Hausdorffraum abgeschlossen?

6.

a) Warum gilt $\forall x \in \mathbb{R}: \exp x > 0$?

b) Warum ist $\exp$ monoton steigend?

c) Warum ist $\sin x$ im Intervall $]0, \pi/4[$ monoton steigend?

d) Wie lautet das Additionsgesetz für den Sinus?

e) Geben Sie eine Definition der Sinusfunktion.

7.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ absolut?

b) Durch diese Potenzreihe wird eine rationale Funktion dargestellt: Welche?

8.

a) Definieren Sie den Begriff „differenzierbare Abbildung“.

b) Definieren Sie den Begriff „partielle Ableitung“.

c) Wann kann man aus der Existenz der partiellen Ableitungen auf die Existenz der Ableitung schließen?

9.

a) Formulieren Sie die Regel von l'Hôpital.

b) Benutzen Sie die Regel zur Berechnung von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

10. Warum gilt für $x > 0$: $\log'(x) = \frac{1}{x}$?

11. Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $c: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ gegebenen Kurve.

12.

a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} x \sin x^2 \, dx$.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$.

13.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x + y)$ im Punkt (x_0, y_0) .

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix (Matrix der zweiten Ableitungen) von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x, y) = x \sin(xy^2)$ im Punkt (x_0, y_0) .

14. Finden Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ im Intervall $]0, 4[$.

15.

a) Formulieren Sie die Taylorformel mit Integralrestglied.

b) Wieviel Terme der Taylorreihe müssen Sie verwenden, um $\sin(1/2)$ mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zu berechnen?

16.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, es gelte $f(0,0) = 0$. Warum ist $f(1,0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) \, dt$?