

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Es wurde gezeigt, daß durch $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ eine stetige Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird, die sog. Exponentialfunktion.

Grundlegend für die Theorie der Exponentialfunktion ist die *Funktionalgleichung* :
Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Beweis:

Wir betrachten die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{(z+w)^k}{k!}, \quad t_n := \sum_{i=0}^n \frac{z^i}{i!}, \quad u_n := \sum_{j=0}^n \frac{w^j}{j!} \quad \text{und zeigen, daß } t_{2n}u_{2n} - s_{2n} \text{ eine Nullfolge bildet.}$$

Damit ist man fertig, denn dann gilt

$$0 = \lim (t_{2n}u_{2n} - s_{2n}) = \lim (t_{2n}u_{2n}) - \lim s_{2n} = \lim t_{2n} \lim u_{2n} - \lim s_{2n} = (\exp z)(\exp w) - \exp(z+w)$$

Jetzt wird gerechnet:

$$t_{2n}u_{2n} = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{z^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{w^j}{j!} \right) = \sum_{i,j=0}^{2n} \frac{z^i w^j}{i! j!}$$

$$s_{2n} := \sum_{k=0}^{2n} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} z^i w^{k-i} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} z^i w^{k-i} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k \frac{z^i w^{k-i}}{i!(k-i)!} = \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} \frac{z^i w^j}{i! j!}$$

Man sieht, daß jeder Summand in der oberen Summe auch in der unteren Summe vorkommt. In der oberen Summe kommen aber auch Summanden vor mit $i+j > 2n$, in der unteren dagegen nicht. Jedenfalls gilt für die Differenz

$$|t_{2n}u_{2n} - s_{2n}| = \left| \sum_{\substack{i+j > 2n \\ 0 \leq i, j \leq 2n}} \frac{z^i w^j}{i! j!} \right| \leq \sum_{\substack{i+j > 2n \\ 0 \leq i, j \leq 2n}} \frac{|z|^i |w|^j}{i! j!} \leq \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{|z|^i |w|^j}{i! j!} + \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \frac{|z|^i |w|^j}{i! j!}$$

Bei der letzten Ungleichung muß man erkennen, daß jeder Summand, der auf der linken Seite vorkommt, auch auf der rechten Seite vorkommt (einige sogar doppelt). Man rechnet weiter:

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{|z|^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{|w|^j}{j!} \right) + \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{|z|^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{|w|^j}{j!} \right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|w|^j}{j!} \right) + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|z|^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|w|^j}{j!} \right) =$$

$$(\exp|z|)b_n + a_n(\exp|w|) =: c_n$$

wobei (a_n) und (b_n) und daher auch (c_n) Nullfolgen mit positiven Werten sind.

Daher muß dann auch $(|t_{2n}u_{2n} - s_{2n}|)$ und schlußendlich auch $(t_{2n}u_{2n} - s_{2n})$ Nullfolge sein.