

Vorbemerkungen über Grenzwerte

Seien M, N metrische Räume, U eine offene Umgebung von $x_0 \in M$, $g: U - \{x_0\} \rightarrow N$ eine Abbildung, $a \in N$.

Die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ soll (definitionsgemäß) bedeuten:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U - \{x_0\} : d(x, x_0) < \delta \rightarrow d(g(x), a) < \epsilon.$$

Man beachte, daß der Punkt x_0 dabei nicht mitbetrachtet werden soll.

Es gibt in diesem Zusammenhang durchaus verschiedene Konventionen; wir einigen uns jetzt auf diese.

Man überlegt leicht, daß $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ äquivalent ist zu:

Für jede Folge $(x_n) \in U - \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a$.

Eine Abbildung $g: U \rightarrow N$ kann man durch Ignorieren des Punkts x_0 auch als Abbildung $U - \{x_0\} \rightarrow N$ betrachten, die wir der Einfachheit halber mit demselben Namen bezeichnen.

Man prüft leicht nach, daß die Stetigkeit von g in x_0 äquivalent ist zu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

(Wiederholende) Vorbemerkungen über stetige lineare Abbildungen

Seien E, F Banachräume, $\varphi: E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung.

Zum Nachweis der Stetigkeit von φ auf ganz E muß man nur die Stetigkeit von φ im Nullpunkt von E feststellen. Die Stetigkeit von φ ist auch äquivalent zur Tatsache, daß es eine Schranke $0 \leq A \in \mathbb{R}$ gibt mit $\forall x \in E: \|\varphi(x)\| \leq A\|x\|$. Man definiert $\|\varphi\|$ als das Infimum dieser Schranken. Es gilt dann auch $\forall x \in E: \|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\|\|x\|$ und $\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(x)\| < \infty$.

Man rechnet leicht nach, daß dadurch eine Norm auf dem Raum $\mathcal{L}(E, F)$ der stetigen linearen Abbildungen definiert wird.

Der Rest des Paragraphen wird im Folgenden nicht benötigt und „dient nur der Bildung“.

Bezeichnet man mit B die abgeschlossene Einheitskugel in E , so sieht man, daß die oben definierte Norm genau die Norm auf dem Raum $C_b(B, F)$ ist¹. Eine Cauchyfolge stetiger linearer Abbildungen $E \rightarrow F$ konvergiert damit jedenfalls auf B gegen eine beschränkte stetige Abbildung, und es ist trivial zu zeigen, daß die Grenzabbildung sich auch linear auf ganz E fortsetzen läßt. Der Raum $\mathcal{L}(E, F)$ ist also ebenfalls vollständig und daher ein Banachraum.

Die obige abstrakte Definition der Norm einer stetigen linearen Abbildung krankt ein wenig daran, daß wir ihren Wert z.B. selbst für durch relativ einfache 2x2-Matrizen gegebene Abbildungen z.Zt. nicht zahlenmäßig berechnen können; dazu braucht man Ergebnisse aus der linearen Algebra über „Eigenwerte“. Da wir die Norm einer linearen Abbildung im Folgenden aber nur für Abschätzungen der Art $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\|\|x\| < \dots < \epsilon$ benötigen, reicht es zu wissen, daß es die Zahl $\|\varphi\|$ gibt.

Für einige besonders einfache Abbildungen können wir die Norm berechnen, z.B. gilt für die Identität $I: E \rightarrow E$ offenbar $\|I\| = 1$; auch die durch $(x, y) \rightarrow (2x, 3y)$ gegebene Abbildung

¹ Siehe Kapitel über gleichmäßige Konvergenz.

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist stetig und besitzt die Norm 3. Der genaue Wert der Norm einer Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hängt meist auch davon ab, welche der möglichen Normen auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ man betrachtet.

Man kann wiederum leicht zeigen, daß alle linearen Abbildungen, deren Definitionsbereich ein endlichdimensionaler Banachraum ist, stetig sind. An dieser Stelle muß man also der Vollständigkeit halber ein Beispiel für eine unstetige lineare Abbildung angeben, und so ein Beispiel sollte für jeden unendlichdimensionalen Banachraum existieren. In einem unendlichdimensionalen Banachraum gibt es offenbar eine abzählbare Menge $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängiger Elemente. Jedes dieser Elemente läßt sich oBdA als auf Länge 1 normiert denken. Man kann diese linear unabhängige Menge zu einer Basis des gesamten Raums ergänzen. Auf einer Basis kann man beliebige Funktionswerte vorgeben und zu einer linearen Abbildung ergänzen. Wählt man also z.B. $e_n \rightarrow n$, so sieht man sofort, daß für eine so definiert Abbildung $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ $\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| = \infty$ gelten muß. Diese lineare Abbildung kann daher nicht stetig in 0 sein.

Differenzierbarkeit

Seien E, F Banachräume, $U \subset E$ offen, $f: U \rightarrow F$ eine Abbildung. f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in U$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $\varphi: E \rightarrow F$ gibt, die f im Punkt x_0 in folgendem Sinne gut approximiert:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U: \|x - x_0\| < \delta \rightarrow \|f(x) - f(x_0) - \varphi(x - x_0)\| \leq \epsilon \|x - x_0\| \quad (*)$$

Dabei läßt sich die Bedingung (*) in verschiedener Weise äquivalent umschreiben, z.B. in

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in E: \|h\| < \delta, x_0 + h \in U \rightarrow \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\| \leq \epsilon \|h\| \quad \text{oder}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in E: 0 < \|h\| < \delta, x_0 + h \in U \rightarrow \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\|}{\|h\|} \leq \epsilon$$

Geben wir im letzten Fall $\epsilon > 0$ vor, so können wir wegen der Offenheit von U von vornherein δ so klein wählen, daß aus $\|h\| < \delta$ $x_0 + h \in U$ folgt. Daher läßt sich die letzte Bedingung auch so schreiben:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in E: 0 < \|h\| < \delta \rightarrow x_0 + h \in U \quad \text{und} \quad \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\|}{\|h\|} \leq \epsilon$$

Dies ist offenbar gleichbedeutend mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{oder auch mit}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \varphi(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Zunächst sollte man jetzt zeigen, daß eine solch „gut approximierende stetige lineare Abbildung“ eindeutig bestimmt ist. Nehmen wir an, es gäbe zwei solche Abbildungen φ, ψ mit $\varphi \neq \psi$.

Dann gäbe es ein $\tilde{h} \in E$, $\tilde{h} \neq 0$ mit $\varphi(\tilde{h}) \neq \psi(\tilde{h})$.

Normieren wir $h_1 := \frac{\tilde{h}}{\|\tilde{h}\|}$, so daß $\|h_1\| = 1$, so ist ebenfalls $\varphi(h_1) \neq \psi(h_1)$.

Laut Voraussetzung gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall h \in E: \|h\| < \delta, x_0 + h \in U \rightarrow \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\| \leq \epsilon \|h\|$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall h \in E: \|h\| < \delta, x_0 + h \in U \rightarrow \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \psi(h)\| \leq \epsilon \|h\|$$

Wir setzen jetzt $\epsilon = \frac{\|\varphi(h_1) - \psi(h_1)\|}{2}$, finden dazu δ_1 und δ_2 , wählen δ_3 so klein, daß

$$U_{\delta_3}(x_0) \subset U, \text{ setzen } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}, \text{ und letztlich } h := \frac{\delta}{2} h_1.$$

Jetzt ist $\|h\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, und man kann abschätzen:

$$\begin{aligned} \|h\| \epsilon &< \|h\| \frac{\|\varphi(h_1) - \psi(h_1)\|}{2} = \frac{\delta/2}{2} \|\varphi(h_1) - \psi(h_1)\| = \frac{1}{2} \|\varphi(\frac{\delta}{2} h_1) - \psi(\frac{\delta}{2} h_1)\| = \frac{1}{2} \|\varphi(h) - \psi(h)\| = \\ &= \frac{1}{2} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h) - (f(x_0 + h) - f(x_0) - \psi(h))\| \leq \\ &= \frac{1}{2} (\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \psi(h)\|) \leq \epsilon \|h\| \end{aligned}$$

und dies ist offenbar ein Widerspruch.

Man muß dahinkommen, dieses Argument für trivial zu halten.

Man hat lediglich auf der durch die skalaren Vielfachen von $\tilde{h}$ gehenden Geraden zunächst einen Einheitsvektor konstruiert und den dann soweit geschrumpft, daß das Resultat in die gewünschte δ -Kugel um 0 rutschte.

Der Begriff der Ableitung

Ist also wie oben die Abbildung $f: U \rightarrow F$ in $x_0 \in U$ differenzierbar, so gibt es eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $\varphi: E \rightarrow F$ mit

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U: \|x - x_0\| < \delta \rightarrow \|f(x) - f(x_0) - \varphi(x - x_0)\| \leq \epsilon \|x - x_0\|$$

bzw. mit den oben genannten äquivalenten Bedingungen.

Diese lineare Abbildung nennen wir die Ableitung von f in x_0 , und sie erhält den speziellen Namen $Df(x_0)$.

Als nächstes diskutiert man die Spezialfälle

- a) $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$ b) $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^n$, insbesondere $n = 2, 3$ c) $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$, insbes. $n = 2, 3$
d) $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$