



# Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

## Vorlesung 2 (25.10.2022): Funktionen

Christoph Lüth



Deutsches  
Forschungszentrum  
für Künstliche  
Intelligenz GmbH



Universität  
Bremen

Wintersemester 2022/23

# Organisatorisches

- ▶ **Wichtig:** GitLab-Repos bitte **nicht** öffentlich machen!
- ▶ Settings → General → Visibility → Private (nicht Internal, nicht Public).
- ▶ Umverteilung in den Tutorien nötig:

Raphael	50	-14
Tede	48	-12
Thomas	17	+19
Alexander	16	+20
Tarek	50	-14
<hr/> Insgesamt	181	36

- ▶ Eintragung der Tutorien in stud.ip (kommt).

# Fahrplan

- ▶ **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - ▶ Einführung
  - ▶ **Funktionen**
  - ▶ Algebraische Datentypen
  - ▶ Typvariablen und Polymorphie
  - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
  - ▶ Rekursive und zyklische Datenstrukturen
  - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

# Inhalt und Lernziele

- ▶ Definition von **Funktionen**
  - ▶ Syntaktische Feinheiten
- ▶ Bedeutung von Haskell-Programmen
  - ▶ Striktheit
- ▶ Leben ohne Variablen
  - ▶ Funktionen statt Schleifen
  - ▶ Zahllose Beispiele

## Lernziele

Wir wollen einfache Haskell-Programme schreiben können, eine Idee von ihrer Bedeutung bekommen, und ein Leben ohne veränderliche Variablen führen.

# Definition von Funktionen

- ▶ Zwei wesentliche Konstrukte:
  - ▶ Fallunterscheidung
  - ▶ Rekursion

# Definition von Funktionen

- ▶ Zwei wesentliche Konstrukte:
  - ▶ Fallunterscheidung
  - ▶ Rekursion

## Satz

Fallunterscheidung und Rekursion auf natürlichen Zahlen sind **Turing-mächtig**.

- ▶ Funktionen müssen **partiell** sein können — insbesondere nicht-terminierende Rekursion
- ▶ Fragen:
  - ① Wie schreiben Funktionen in Haskell auf (**Syntax**)?
  - ② Was bedeutet das (**Semantik**)?

# I. Die Syntax von Haskell

# Haskell-Syntax: Charakteristika

## ► Leichtgewichtig

- ▶ Wichtigstes Zeichen:
- ▶ Funktionsapplikation: `f a`
- ▶ Klammern sind optional
- ▶ **Höchste** Priorität (engste Bindung)
- ▶ Abseitsregel: Gültigkeitsbereich durch Einrückung
  - ▶ Keine Klammern (`{ ... }`) (optional)
  - ▶ Auch in anderen Sprachen (Python, Ruby)

# Funktionsdefinition

Generelle Form:

► **Signatur:**

```
max :: Int → Int → Int
```

► **Definition:**

```
max x y = if x < y then y else x
```

- Kopf, mit Parametern
- Rumpf (evtl. länger, mehrere Zeilen)
- Typisches Muster: Fallunterscheidung, dann rekursiver Aufruf
- Was gehört zum Rumpf (Geltungsberreich)?

# Die Abseitsregel

Funktionsdefinition:

```
f x1 x2 x3...xn = e
```

- **Gültigkeitsbereich** der Definition von `f`:

alles, was gegenüber `f` eingerückt ist.

- Beispiel:

```
f x = hier faengts an  
      und hier gehts weiter  
          immer weiter
```

```
g y z = und hier faengt was neues an
```

- Gilt auch verschachtelt.
- Kommentare sind passiv (heben das Abseits nicht auf).

# Kommentare

- ▶ Pro Zeile: Ab — bis Ende der Zeile

```
f x y = irgendwas — und hier der Kommentar!
```

- ▶ Über mehrere Zeilen: Anfang {—, Ende -}

```
{—  
    Hier faengt der Kommentar an  
    erstreckt sich ueber mehrere Zeilen  
    bis hier  
f x y = irgendwas                                -}
```

- ▶ Kann geschachtelt werden.

# Bedingte Definitionen

- ▶ Statt verschachtelter Fallunterscheidungen . . .

```
f x y = if B1 then P else  
           if B2 then Q else R
```

... bedingte Gleichungen:

```
f x y  
| B1 = P  
| B2 = Q
```

- ▶ Auswertung der Bedingungen von oben nach unten
- ▶ Wenn keine Bedingung wahr ist: **Laufzeitfehler!** Deshalb:  
| otherwise = R

# Lokale Definitionen

- Lokale Definitionen mit `where` oder `let`:

```
f x y
| g = P y
| otherwise = f x where
|   y = M
|   f x = N x
```

```
f x y =
let y = M
    f x = N x
in  if g then P y
        else f x
```

- `f`, `y`, ... werden **gleichzeitig** definiert (Rekursion!)
- Namen `f`, `y` und Parameter `x` **überlagern** andere.
  - Parameter überlagern Funktionsnamen (`f f x = f x`)
- Es gilt die **Abseitsregel**
  - Deshalb: Auf gleiche Einrückung der lokalen Definition achten!

☞ Siehe Übung 2.??

## II. Auswertung von Funktionen

# Auswertung von Funktionen

- ▶ Auswertung durch **Anwendung** von Gleichungen
- ▶ **Auswertungsrelation**  $s \rightarrow t$ :
  - ▶ Anwendung einer Funktionsdefinition
  - ▶ Anwendung von elementaren Operationen (arithmetisch, Zeichenketten)
- ▶ Frage: spielt die **Reihenfolge** eine Rolle?

# Auswertung von Ausdrücken

inc :: Int → Int

inc x = x+ 1

dbl :: Int → Int

dbl x = 2\*x

- ▶ Reduktion von inc (dbl (inc 3))

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
```

```
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
```

```
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):  
`inc (dbl (inc 3))`

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
```

```
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
```

```
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\text{inc} (\text{dbl} (\text{inc} 3)) \rightarrow \text{dbl} (\text{inc} 3) + 1$$

# Auswertung von Ausdrücken

inc :: Int → Int

inc x = x+ 1

dbl :: Int → Int

dbl x = 2\*x

- ▶ Reduktion von inc (dbl (inc 3))
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc } (\text{dbl } (\text{inc } 3)) &\rightarrow \text{dbl } (\text{inc } 3) + 1 \\ &\rightarrow 2 * (\text{inc } 3) + 1 \end{aligned}$$

# Auswertung von Ausdrücken

inc :: Int → Int

inc x = x+ 1

dbl :: Int → Int

dbl x = 2\*x

- ▶ Reduktion von inc (dbl (inc 3))
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc } (\text{dbl } (\text{inc } 3)) &\rightarrow \text{dbl } (\text{inc } 3) + 1 \\ &\rightarrow 2 * (\text{inc } 3) + 1 \\ &\rightarrow 2 * (3 + 1) + 1 \rightarrow 2 * 4 + 1 \rightarrow 8 + 1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int  
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int  
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):  
`inc (dbl (inc 3))`

# Auswertung von Ausdrücken

inc :: Int → Int

inc x = x+ 1

dbl :: Int → Int

dbl x = 2\*x

- ▶ Reduktion von inc (dbl (inc 3))

- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

$$\text{inc (dbl (inc 3))} \rightarrow \text{inc (dbl (3+1))}$$

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
```

```
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
```

```
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`

- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

$$\text{inc (dbl (inc 3))} \rightarrow \text{inc (dbl (3+1))} \rightarrow \text{inc (dbl 4)}$$

# Auswertung von Ausdrücken

inc :: Int → Int

inc x = x+ 1

dbl :: Int → Int

dbl x = 2\*x

- ▶ Reduktion von inc (dbl (inc 3))

- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{inc (dbl (3+1))} \rightarrow \text{inc (dbl 4)} \\ &\rightarrow \text{inc (2*4)} \end{aligned}$$

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
```

```
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
```

```
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`

- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{inc (dbl (3+1))} \rightarrow \text{inc (dbl 4)} \\ &\rightarrow \text{inc (2*4)} \rightarrow \text{inc 8} \end{aligned}$$

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
```

```
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
```

```
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`

- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{inc (dbl (3+1))} \rightarrow \text{inc (dbl 4)} \\ &\rightarrow \text{inc (2*4)} \rightarrow \text{inc 8} \\ &\rightarrow 8+1 \end{aligned}$$

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int  
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int  
dbl x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{dbl (inc 3)+ 1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+ 1 \\ &\rightarrow 2*(3+ 1)+ 1 \rightarrow 2*4+1 \rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

$$\begin{aligned} \text{inc (dbl (inc 3))} &\rightarrow \text{inc (dbl (3+1))} \rightarrow \text{inc (dbl 4)} \\ &\rightarrow \text{inc (2*4)} \rightarrow \text{inc 8} \\ &\rightarrow 8+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int  
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int  
dbl x = 2*x
```

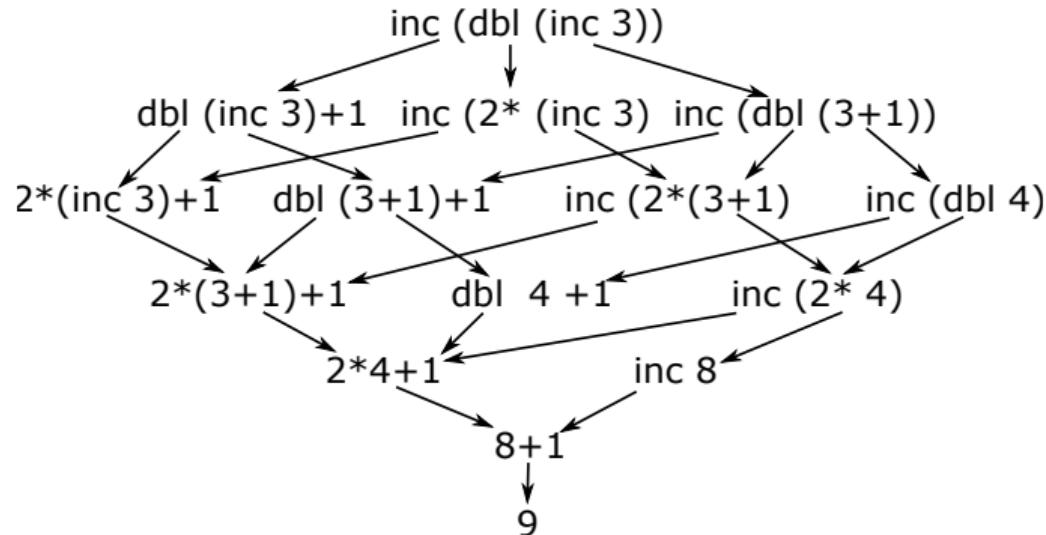
- ▶ Volle Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`:

# Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int  
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int  
dbl x = 2*x
```

- Volle Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`:



# Konfluenz

- ▶ Es kommt immer das gleiche heraus?
- ▶ Sei  $\xrightarrow{*}$  die Reduktion in null oder mehr Schritten.

## Definition (Konfluenz)

$\xrightarrow{*}$  ist **konfluent** gdw:

Für alle  $r, s, t$  mit  $s \xleftarrow{*} r \xrightarrow{*} t$  gibt es  $u$  so dass  $s \xrightarrow{*} u \xleftarrow{*} t$ .

# Konfluenz

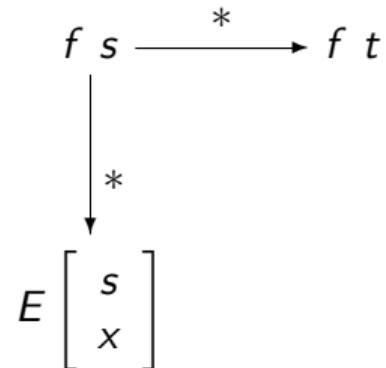
- Wenn wir von Laufzeitfehlern abstrahieren, gilt:

## Theorem (Konfluenz)

Die Auswertungsrelation  $\xrightarrow{*}$  für funktionale Programme ist **konfluent**.

- Beweisskizze:

Sei  $f \ x = E$  und  $s \xrightarrow{*} t$ :



# Konfluenz

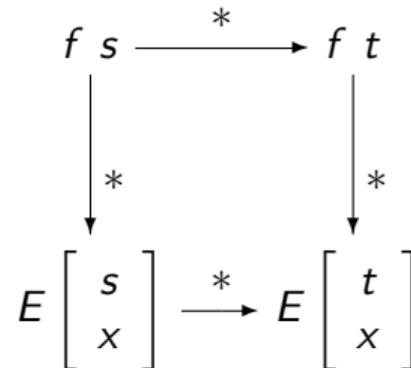
- Wenn wir von Laufzeitfehlern abstrahieren, gilt:

## Theorem (Konfluenz)

Die Auswertungsrelation  $\xrightarrow{*}$  für funktionale Programme ist **konfluent**.

- Beweisskizze:

Sei  $f \ x = E$  und  $s \xrightarrow{*} t$ :



## Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?

# Auswirkung der Auswertungsstrategie

- ▶ Auswertungsstrategie ist also egal?
- ▶ Beispiel:

```
repeat :: Int → String → String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- ▶ Auswertung von `repeat 0 undef`:

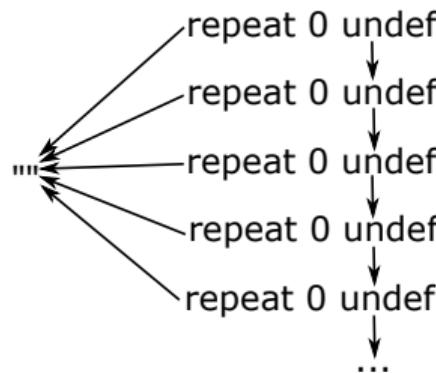
# Auswirkung der Auswertungsstrategie

- ▶ Auswertungsstrategie ist also egal?
- ▶ Beispiel:

```
repeat :: Int → String → String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- ▶ Auswertung von `repeat 0 undef`:



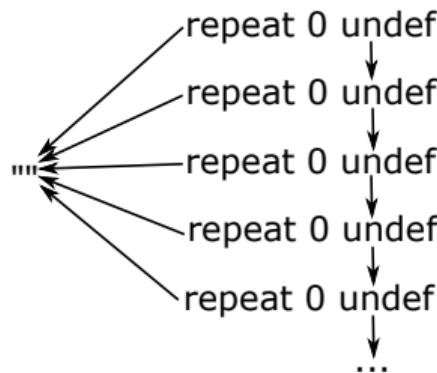
# Auswirkung der Auswertungsstrategie

- ▶ Auswertungsstrategie ist also egal?
- ▶ Beispiel:

```
repeat :: Int → String → String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- ▶ Auswertung von `repeat 0 undef`:



- ▶ outermost-first **terminiert**
- ▶ innermost-first terminiert **nicht**

# Termination und Normalform

## Definition (Termination)

→ ist **terminierend** gdw. es **keine unendlichen** Ketten gibt:

$$t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \dots t_n \rightarrow \dots$$

## Theorem (Normalform)

Sei  $\rightarrow^*$  konfluent und terminierend, dann wertet jeder Term zu genau einer **Normalform** aus, die nicht weiter ausgewertet werden kann.

- Daraus folgt: **terminierende** funktionale Programme werten unter jeder Auswertungsstrategie jeden Ausdruck zum gleichen Wert aus (der Normalform).

# Auswirkung der Auswertungsstrategie

- ▶ Auswertungsstrategie nur für **nicht-terminierende** Programme relevant.
- ▶ Leider ist nicht-Termination **nötig** (Turing-Mächtigkeit)
- ▶ Gibt es eine **semantische** Charakterisierung?
- ▶ Auswertungsstrategie und Parameterübergabe:
  - ▶ Outermost-first entspricht **call-by-need**, verzögerte Auswertung.
  - ▶ Innermost-first entspricht **call-by-value**, strikte Auswertung

☞ Siehe Übung 2.??

# III. Semantik und Striktheit

# Bedeutung (Semantik) von Programmen

## ► Operationale Semantik:

- Durch den **Ausführungs**begriff
- Ein Programm **ist**, was es **tut**.
- In diesem Fall: →

## ► Denotationelle Semantik:

- Programme werden auf **mathematische Objekte** abgebildet (Denotat).
- Für funktionale Programme: **rekursiv** definierte Funktionen

## Äquivalenz von operationaler und denotationaler Semantik

Sei  $P$  ein funktionales Programm,  $\xrightarrow{*}$  die dadurch definierte Reduktion, und  $\llbracket P \rrbracket$  das Denotat.  
Dann gilt für alle Ausdrücke  $t$  und Werte  $v$

$$t \xrightarrow{*} v \iff \llbracket P \rrbracket(t) = v$$

# Striktheit

## Definition (Striktheit)

Funktion  $f$  ist **strikt**  $\iff$  Ergebnis ist undefiniert, sobald ein Argument undefiniert ist.

- ▶ **Denotationelle** Eigenschaft (nicht operational)
- ▶ Haskell ist nach **Sprachdefinition nicht-strikt**
  - ▶ `repeat 0 undef` muss "" ergeben.
  - ▶ Meisten **Implementationen** nutzen **verzögerte Auswertung**
- ▶ Andere Programmiersprachen:
  - ▶ Java, C, etc. sind **call-by-value** (nach Sprachdefinition) und damit **strikt**
  - ▶ Fallunterscheidung ist **immer** nicht-strikt, Konjunktion und Disjunktion meist auch.

☞ Siehe Übung 2.??

# IV. Leben ohne Variablen

# Rekursion statt Schleifen

Fakultät imperativ:

```
r= 1;  
while (n > 0) {  
    r= n* r;  
    n= n- 1;  
}
```

- ▶ Veränderliche Variablen werden zu Funktionsparametern
- ▶ Iteration (while-Schleifen) werden zu Rekursion

# Rekursion statt Schleifen

Fakultät imperativ:

```
r = 1;  
while (n > 0) {  
    r = n * r;  
    n = n - 1;  
}
```

Fakultät rekursiv:

```
fac :: Int → Int  
  
fac n =  
    if n ≤ 0 then 1  
    else n * fac (n-1)
```

- ▶ Veränderliche Variablen werden zu Funktionsparametern
- ▶ Iteration (while-Schleifen) werden zu Rekursion

# Rekursive Funktionen auf Zeichenketten

- ▶ Test auf die leere Zeichenkette:

```
null :: String → Bool  
null xs = xs == ""
```

- ▶ Kopf und Rest einer nicht-leeren Zeichenkette (vordefiniert):

```
head :: String → Char  
tail :: String → String
```



# Suche in einer Zeichenkette

- ▶ Suche nach einem Zeichen in einer Zeichenkette:

```
count1 :: Char → String → Int
```

- ▶ In einem leeren String: kein Zeichen kommt vor



# Suche in einer Zeichenkette

- ▶ Suche nach einem Zeichen in einer Zeichenkette:

```
count1 :: Char → String → Int
```

- ▶ In einem leeren String: kein Zeichen kommt vor
- ▶ Ansonsten: Kopf vergleichen, zum Vorkommen im Rest addieren

```
count1 c s =  
  if null s then 0  
  else if head s == c then 1 + count1 c (tail s)  
                      else count1 c (tail s)
```



# Suche in einer Zeichenkette

- ▶ Suche nach einem Zeichen in einer Zeichenkette:

```
count1 :: Char → String → Int
```

- ▶ In einem leeren String: kein Zeichen kommt vor
- ▶ Ansonsten: Kopf vergleichen, zum Vorkommen im Rest addieren

```
count1 c s =  
  if null s then 0  
  else if head s == c then 1 + count1 c (tail s)  
                    else count1 c (tail s)
```

- ▶ Übung: wie formuliere ich `count` mit Guards? (Lösung in den Quellen)



# Strings konstruieren

- `:` hängt Zeichen vorne an Zeichenkette an (vordefiniert)

```
(::) :: Char → String → String
```

- Es gilt: Wenn `not (null s)`, dann `head s : tail s == s`

- Mit `(::)` wird `(++)` definiert:

```
(++) :: String → String → String
```

```
xs ++ ys
| null xs    = ys
| otherwise   = head xs : (tail xs ++ ys)
```

- `quadrat` konstruiert ein Quadrat aus Zeichen:

```
quadrat :: Int → Char → String
```

```
quadrat n c = repeat n (repeat n (c: "") ++ "\n")
```



# Strings analysieren

- ▶ Warum immer nur Kopf/Rest? Warum nicht letztes Zeichen/Anfang?
- ▶ Letztes Zeichen (dual zu `head`)

```
last :: String → Char
last s
| null s = error "last: empty string"
| null (tail s) = head s
| otherwise      = last (tail s)
```

- ▶ **Laufzeitfehler** bei leerem String

# Strings analysieren

- Anfang der Zeichenkette (dual zu `tail`):

```
init :: String → String
init s
| null s = error "init: empty string"      — nicht s
| null (tail s) = ""
| otherwise     = head s : init (tail s)
```

- Damit: Wenn `not (null s)`, dann `init s ++ (last s: "") = s`

# Strings analysieren: das Palindrom

- ▶ Palindrom: vorwärts und rückwärts gelesen gleich.
- ▶ Rekursiv:
  - ▶ Alle Wörter der Länge 1 oder kleiner sind Palindrome
  - ▶ Für längere Wörter: wenn erstes und letztes Zeichen gleich sind und der Rest ein Palindrom.
- ▶ Erste Variante:

```
palin1 :: String → Bool
palin1 s
| length s ≤ 1      = True
| head s == last s = palin1 (init (tail s))
| otherwise          = False
```



# Strings analysieren: das Palindrom

- ▶ Problem: Groß/Kleinschreibung, Leerzeichen, Satzzeichen irrelevant.
- ▶ Daher: nicht-alphanumerische Zeichen entfernen, alles Kleinschrift:

```
clean :: String → String
clean s
| null s = ""
| isAlphaNum (head s) = toLower (head s) : clean (tail s)
| otherwise = clean (tail s)
```

- ▶ Erweiterte Version:

```
palin2 s = palin1 (clean s)
```



## Fortgeschritten: Vereinfachung von palin1

- Das hier ist nicht so schön:

```
palin1 s
| length s ≤ 1      = True
| head s == last s = palin1 (init (tail s))
| otherwise          = False
```

- Was steht da eigentlich:

```
palin1' s = if length s ≤ 1 then True
            else if head s == last s then palin1' (init (tail s))
                                         else False
```

- Damit:

```
palin3 s = length s ≤ 1 || head s == last s && palin3 (init (tail s))
```

- Terminiert nur wegen Nicht-Striktheit von ||

# Endrekursion

- **Endrekursive** Funktionen verbrauchen keinen Speicherplatz:

Fakultät rekursiv:

```
fac :: Int → Int  
fac n =  
  if n ≤ 0 then 1  
  else n * fac (n-1)
```

Fakultät **endrekursiv**:

```
fac1 :: Int → Int → Int  
fac1 n r =  
  if n ≤ 0 then r  
  else fac1 (n-1) (n*r)
```

```
fac2 n = fac1 n 1
```

- Eine Funktion ist **endrekursiv**, wenn über dem rekursiven Aufruf nur Fallunterscheidungen sind.



# Suche in einer Zeichenkette

- Endrekursiv:

```
count3 c s = count3' c s 0
count3' c s r =
  if null s then r
  else count3' c (tail s) (if head s == c then 1+r else r)
```

# Suche in einer Zeichenkette

- Endrekursiv:

```
count3 c s = count3' c s 0
count3' c s r =
  if null s then r
  else count3' c (tail s) (if head s == c then 1+r else r)
```

- Endrekursiv mit lokaler Definition

```
count4 c s = count4' s 0 where
count4' s r =
  if null s then r
  else count4' (tail s) (if head s == c then 1+r else r)
```

# Zusammenfassung

- ▶ **Bedeutung** von Haskell-Programmen:
  - ▶ Auswertungsrelation →
  - ▶ Auswertungsstrategien: innermost-first, outermost-first
  - ▶ Auswertungsstrategie für terminierende Programme irrelevant
- ▶ **Striktheit**
  - ▶ Haskell ist **spezifiziert** als nicht-strikt
  - ▶ Meist implementiert durch verzögerte Auswertung
- ▶ Leben **ohne Variablen**:
  - ▶ Rekursion statt Schleifen
  - ▶ Funktionsparameter statt Variablen
- ▶ Nächste Vorlesung: Datentypen