Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 3 (01.11.2022): Algebraische Datentypen

Christoph Lüth

Deutsches Forschungszentrum für Künstliche Intelligenz GmbH
Universität Bremen

Wintersemester 2022/23

Organisatorisches

- Umverteilung in den Tutorien nötig:

Raphael	37	-2
Tede	39 (43)	0
Thomas	17	+22
Alexander	32	-7
Tarek	71	-32
Insgesamt	196	39

- Eintragung der Tutorien in stud.ip (kommt).

Fahrplan

- **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - Einführung
  - Funktionen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Rekursive und zyklische Datenstrukturen
  - Funktionen höherer Ordnung II
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt und Lernziele

- Algebraische Datentypen:
  - Aufzählungen
  - Produkte
  - Rekursive Datentypen

Lernziel

Wir wissen, was algebraische Datentypen sind. Wir können mit ihnen modellieren, wir kennen ihre Eigenschaften, und können auf ihnen Funktionen definieren.

I. Datentypen

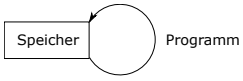
Warum Datentypen?

- Immer nur `Int` ist auch langweilig ...
- **Abstraktion:**
  - `Bool` statt `Int`, Namen statt RGB-Codes, ...
- **Bessere** Programme (verständlicher und wartbarer)
- Datentypen haben **wohlverstandene algebraische Eigenschaften**

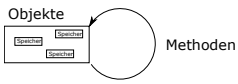
Datentypen als Modellierungskonstrukt

Programme **manipulieren** ein **Modell** der Umwelt:

- Imperative Sicht:



- Objektorientierte Sicht:



- Funktionale Sicht:

Das Modell besteht aus Datentypen.

Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Ein Tante-Emma Laden wie in früheren Zeiten.

Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Äpfel	Boskoop	55	ct/Stk
	Cox Orange	60	ct/Stk
	Granny Smith	50	ct/Stk
Eier		20	ct/Stk
Käse	Gouda	14,50	€/kg
	Appenzeller	22.70	€/kg
Schinken		1.99	€/100 g
Salami		1.59	€/100 g
Milch		0.69	€/l
	Bio	1.19	€/l

Aufzählungen

- Aufzählungen: Menge von **disjunkten** Konstanten

$$Apfel = \{Boskoop, Cox, Smith\}$$

$$Boskoop \neq Cox, Cox \neq Smith, Boskoop \neq Smith$$

- Genau drei unterschiedliche Konstanten
- Funktion mit Definitionsbereich *Apfel* muss drei Fälle unterscheiden
- Beispiel: $preis : Apfel \to \mathbb{N}$ mit

$$preis(a) = \begin{cases} 55 & a = Boskoop \\ 60 & a = Cox \\ 50 & a = Smith \end{cases}$$

Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- **Definition**

```
data Apfelsorte = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

  - Implizite Deklaration der **Konstruktoren** `Boskoop :: Apfelsorte` als Konstanten
  - **Großschreibung** der Konstruktoren und Typen
- **Fallunterscheidung**:

```
apreis :: Apfelsorte→ Int
apreis a = case a of
  Boskoop → 55
  CoxOrange → 60
  GrannySmith → 50
```

```
data Farbe = Rot | Gruen
farbe :: Apfelsorte→ Farbe
farbe d =
 case d of
  GrannySmith → Gruen
  _ → Rot
```


Fallunterscheidung in der Funktionsdefinition

- Abkürzende Schreibweisen (**syntaktischer Zucker**):

$$\begin{array}{l} f\ c_1 = e_1 \\ \ldots \\ f\ c_n = e_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad f\ x = \texttt{case}\ x\ \texttt{of}\ \begin{array}{l} c_1 \to e_1 \\ \ldots \\ c_n \to e_n \end{array}$$

- Damit:

```
apreis :: Apfelsorte → Int
apreis Boskoop = 55
apreis CoxOrange = 60
apreis GrannySmith = 50
```


Der einfachste Aufzählungstyp

- **Einfachste** Aufzählung: Wahrheitswerte

$$Bool = \{False, True\}$$

  - Genau zwei unterschiedliche Werte
- **Definition** von Funktionen:
  - Wertetabellen sind explizite Fallunterscheidungen

$\wedge$	*true*	*false*
true	*true*	*false*
false	*false*	*false*

$$\begin{array}{lcll} true & \wedge & true & = true \\ true & \wedge & false & = false \\ false & \wedge & true & = false \\ false & \wedge & false & = false \end{array}$$

Wahrheitswerte: `Bool`

- **Vordefiniert** als

```
data Bool= False | True
```

- Vordefinierte **Funktionen**:

```
not  :: Bool→ Bool          — Negation
(&&) :: Bool→ Bool→ Bool    — Konjunktion
(||) :: Bool→ Bool→ Bool    — Disjunktion
```

- `if _ then _ else _` als syntaktischer Zucker:

```
if b then p else q  ⟶  case b of  True  → p
                                  False → q
```

☞ Siehe Übung 3.1

II. Produkte

Produkte

- Konstruktoren können **Argumente** haben
- Beispiel: Ein **RGB-Wert** besteht aus drei Werten
- Mathematisch: Produkt (Tripel)

$$Colour = \{(r, g, b) \mid r \in \mathbb{N}, g \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

- In Haskell: Konstruktoren mit **Argumenten**

```
data Colour = RGB Int Int Int
```

  - Beispielwerte:

```
yellow :: Colour
yellow = RGB 255 255 0      — 0xFFFF00
```

```
violet :: Colour
violet = RGB 238 130 238    — 0xEE82EE
```

Funktionsdefinition auf Produkten

- **Funktionsdefinition**:
  - Konstruktorargumente sind **gebundene** Variablen
  - Wird bei der **Auswertung** durch konkretes Argument ersetzt
  - Kann mit Fallunterscheidung kombiniert werden
- Beispiele:

```
red :: Colour → Int
red (RGB r _ _) = r
```

```
adjust :: Colour→ Float→ Colour
adjust (RGB r g b) f = RGB (conv r) (conv g) (conv b) where
  conv colour = min (round (fromIntegral colour∗ f)) 255
```

Beispiel: Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

- Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaesesorte = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaesesorte → Int
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

- Alle Artikel:

```
data Artikel =
    Apfel Apfelsorte    | Eier        | Kaese Kaesesorte
  | Schinken           | Salami      | Milch Bio
```

```
data Bio = Bio | Chemie
```


Beispiel: Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

- Berechnung des Preises für eine bestimmte **Menge** eines **Produktes**
- Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int | Liter Double
```

- Preisberechung

```
preis :: Artikel → Menge → Int
```

  - Aber was ist mit ungültigen Kombinationen (3 Liter Äpfel)?
  - Könnten Laufzeitfehler erzeugen (`error ..`) aber nicht wieder fangen.
  - Ausnahmebehandlung **nicht referentiell transparent**
  - Könnten spezielle Werte (`0` oder `-1`) zurückgeben
- Besser: Ergebnis als Datentyp mit explizitem Fehler (**Reifikation**):

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```


Beispiel: Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

- Der Preis und seine Berechnung:

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```

```
preis :: Artikel → Menge→ Preis
```

```
preis (Apfel a) (Stueck n)  = Cent (n∗ apreis a)
preis Eier (Stueck n)       = Cent (n∗ 20)
preis (Kaese k)(Gramm g)    = Cent (div (g∗ kpreis k) 1000)
preis Schinken (Gramm g)    = Cent (div (g∗ 199) 100)
preis Salami (Gramm g)      = Cent (div (g∗ 159) 100)
preis (Milch bio) (Liter l) =
     Cent (round (l∗ case bio of Bio → 119; Chemie → 69))
preis _ _ = Ungueltig
```

☞ Siehe Übung 3.3

III. Algebraische Datentypen

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

$$\begin{aligned}\texttt{data T} = \;& \texttt{C}_1\ \texttt{t}_{1,1}\ \ldots\ \texttt{t}_{1,k_1}\\ \mid\;& \texttt{C}_2\ \texttt{t}_{2,1}\ \ldots\ \texttt{t}_{2,k_2}\\ &\vdots\\ \mid\;& \texttt{C}_n\ \texttt{t}_{n,1}\ \ldots\ \texttt{t}_{n,k_n}\end{aligned}$$

- **Aufzählungen**
- Konstrukturen mit **einem** oder **mehreren** Argumenten (Produkte)
- Der allgemeine Fall: **mehrere** Konstrukturen

Eigenschaften algebraischer Datentypen

$$\begin{aligned}\texttt{data T} = \;& \texttt{C}_1\ \texttt{t}_{1,1}\ldots\texttt{t}_{1,k_1}\\ \mid\;& \texttt{C}_2\ \texttt{t}_{2,1}\ldots\texttt{t}_{2,k_2}\\ &\vdots\\ \mid\;& \texttt{C}_n\ \texttt{t}_{n,1}\ldots\texttt{t}_{n,k_n}\end{aligned}$$

Drei Eigenschaften eines algebraischen Datentypen

1. Konstruktoren $\texttt{C}_1,\ldots,\texttt{C}_n$ sind **disjunkt**:
$$\texttt{C}_i\ \texttt{x}_1\ldots\texttt{x}_n = \texttt{C}_j\ \texttt{y}_1\ldots\texttt{y}_m \Longrightarrow i = j$$
2. Konstruktoren sind **injektiv**:
$$\texttt{C}\ \texttt{x}_1\ldots\texttt{x}_n = \texttt{C}\ \texttt{y}_1\ldots\texttt{y}_n \Longrightarrow \texttt{x}_i = \texttt{y}_i$$
3. Konstruktoren **erzeugen** den Datentyp:
$$\forall x \in T.\, x = \texttt{C}_i\ \texttt{y}_1\ldots\texttt{y}_m$$

Diese Eigenschaften machen **Fallunterscheidung** wohldefiniert.

Algebraische Datentypen: Nomenklatur

$\texttt{data T} = \texttt{C}_1\ \texttt{t}_{1,1}\ldots\texttt{t}_{1,k_1} \mid \cdots \mid \texttt{C}_n\ \texttt{t}_{n,1}\ldots\texttt{t}_{n,k_n}$

- $\texttt{C}_i$ sind **Konstruktoren**
  - **Immer** implizit definiert und deklariert
- **Selektoren** sind Funktionen $\texttt{sel}_{i,j}$:
  $\texttt{sel}_{i,j} :: \texttt{T} \to \texttt{t}_{i,k_i}$
  $\texttt{sel}_{i,j}\ (\texttt{C}_i\ \texttt{t}_{i,1}\ldots\ \texttt{t}_{i,k_i}) = \texttt{t}_{i,j}$
  - Partiell, linksinvers zu Konstruktor $\texttt{C}_i$
  - **Können** implizit definiert und deklariert werden
- **Diskriminatoren** sind Funktionen $\texttt{dis}_i$:
  $\texttt{dis}_i :: \texttt{T} \to \texttt{Bool}$
  $\texttt{dis}_i\ (\texttt{C}_i \ldots) = \texttt{True}$
  $\texttt{dis}_i\ \_ = \texttt{False}$
  - Definitionsbereichsbereich des Selektors $\texttt{sel}_i$, **nie** implizit

Auswertung der Fallunterscheidung

- Argument der Fallunterscheidung wird **nur soweit nötig** ausgewertet
- Beispiel:

```
f :: Preis → Int
f p = case p of Cent i → i; Ungueltig → 0
```

```
g :: Preis→ Int
g p = case p of Cent i → 99; Ungueltig → 0
```

```
add :: Preis→ Preis→ Preis
add (Cent i) (Cent j) = Cent (i+ j)
add _ _ = Ungueltig
```

- Argument von `Cent` wird in `f` ausgewertet, in `g` nicht
- Zweites Argument von `add` wird nicht immer ausgewertet

Rekursive Algebraische Datentypen

$$\texttt{data T} = \texttt{C}_1\ \texttt{t}_{1,1} \ldots \texttt{t}_{1,k_1} \mid \vdots \mid \texttt{C}_n\ \texttt{t}_{n,1} \ldots \texttt{t}_{n,k_n}$$

- Der definierte Typ `T` kann **rechts** benutzt werden.
- Rekursive Datentypen definieren **unendlich große** Wertemengen.
- Modelliert **Aggregation** (Sammlung von Objekten).
- Funktionen werden durch **Rekursion** definiert.

Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe Revisited

- Das **Lager** für Bob's Shoppe:
  - ist entweder leer,
  - oder es enthält einen Artikel und Menge, und noch mehr

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```


Suchen im Lager

- Rekursive Suche (erste Version):

```
suche :: Artikel→ Lager→ Menge
suche art LeeresLager = ???
```

- Modellierung des **Resultats**:

```
data Resultat = Gefunden Menge | NichtGefunden
```

- Damit rekursive **Suche**:

```
suche :: Artikel→ Lager→ Resultat
suche art (Lager lart m l)
  | art == lart = Gefunden m
  | otherwise   = suche art l
suche art LeeresLager  = NichtGefunden
```


Einlagern

- Signatur:

```
einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager
```

- Erste Version:

```
einlagern a m l = Lager a m l
```

- Mengen sollen **aggregiert** werden (35l Milch + 20l Milch = 55l Milch)
- Dazu Hilfsfunktion:

```
addiere (Stueck i) (Stueck j)= Stueck (i+ j)
addiere (Gramm g) (Gramm h)  = Gramm (g+ h)
addiere (Liter l) (Liter m)  = Liter (l+ m)
addiere m n = error ("addiere:␣"++ show m++ "␣und␣"++ show n)
```


Einlagern

- Damit einlagern:

```
einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager
einlagern a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
einlagern a m (Lager al ml l)
  | a == al   = Lager a (addiere m ml) l
  | otherwise = Lager al ml (einlagern a m l)
```

- Problem: **Falsche Mengenangaben**
  - Bspw. `einlagern Eier (Liter 3.0) l`
  - Erzeugen Laufzeitfehler in `addiere`
- Lösung: eigentliche Funktion `einlagern` wird als **lokale Funktion** versteckt, und nur mit gültiger Mengenangabe aufgerufen.

Einlagern

- Lösung: eigentliche Funktion `einlagern` wird als **lokale Funktion** versteckt, und nur mit gültiger Mengenangabe aufgerufen.

```
einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager
einlagern a m l =
  let einlagern' a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
      einlagern' a m (Lager al ml l)
        | a == al   = Lager a (addiere m ml) l
        | otherwise = Lager al ml (einlagern' a m l)
  in case preis a m of
       Ungueltig → l
       _ → einlagern' a m l
```


Einkaufen und bezahlen

- Wir brauchen einen **Einkaufskorb:**

```
data Einkaufskorb = LeererKorb
                  | Einkauf Artikel Menge Einkaufskorb
```

- Artikel einkaufen:

```
einkauf :: Artikel→ Menge→ Einkaufskorb→ Einkaufskorb
einkauf a m e =
  case preis a m of
    Ungueltig → e
    _ → Einkauf a m e
```

- Auch hier: ungültige Mengenangaben erkennen
- Es wird **nicht** aggregiert

Beispiel: Kassenbon

```
kassenbon :: Einkaufskorb→ String
```

Ausgabe:

```
** Bob's Aulde-Time Grocery Shoppe **

Artikel              Menge      Preis
-------------------------------------
Kaese Appenzeller    378 g.   8.58 EU
Schinken              50 g.   0.99 EU
Milch Bio            1.0 l.   1.19 EU
Schinken              50 g.   0.99 EU
Apfel Boskoop          3 St   1.65 EU
=====================================
Summe:                       13.40 EU
```

Unveränderlicher Kopf

Ausgabe von Artikel und Menge (rekursiv)

Ausgabe von `kasse`

Kassenbon: Implementation

- Kernfunktion:

```
artikel :: Einkaufskorb→ String
artikel LeererKorb = ""
artikel (Einkauf a m e) =
   formatL 20 (show a) ++
   formatR 7  (menge m) ++
   formatR 10 (showEuro (cent a m)) ++ "\n"++ artikel e
```

- Hilfsfunktionen:

```
formatL :: Int→ String→ String

formatR :: Int→ String→ String

showEuro :: Int→ String
```

IV. Rekursive Datentypen

Beispiel: Zeichenketten selbstgemacht

- Eine **Zeichenkette** ist
  - entweder leer (das leere Wort ϵ)
  - oder ein Zeichen c und eine weitere Zeichenkette xs

```
data MyString = Empty
              | Char :+ MyString
```

- **Lineare** Rekursion
  - Genau ein rekursiver Aufruf
- Haskell-Merkwürdigkeit #237:
  - Die Namen von Operator-Konstruktoren müssen mit einem : beginnen.

Rekursiver Typ, rekursive Definition

- Typisches Muster: **Fallunterscheidung**
  - Ein Fall pro Konstruktor
- Hier:
  - Leere Zeichenkette
  - Nichtleere Zeichenkette

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
length :: MyString→ Int
length Empty    = 0
length (c :+ s) = 1+ length s
```

- Verkettung:

```
(++) :: MyString→ MyString→ MyString
Empty ++ t  = t
(c :+ s) ++ t = c :+ (s++ t)
```

- Umdrehen:

```
rev :: MyString→ MyString
rev Empty    = Empty
rev (c :+ t) = rev t ++ (c :+ Empty)
```

Datentypen und Funktionsdefinition

- Die Definition des **Datentypen** bestimmt wie **Funktionen** auf diesem Datentypen definiert werden können:

Datentyp `T` definiert durch:	Funktionen auf `T` definiert durch:	Beispiel
Aufzählung	Fallunterscheidung	`Apfelsorte`, `Bool`
Produkt	Selektor (pattern matching)	`Artikel`, `Colour`
Rekursion	Rekursion	`Lager`, `Einkaufskorb`, `MyString`

V. Datentypen in Anderen Programmiersprachen

Datentypen in Java

- Speicherverwaltung wie in Haskell (garbage collection)
- Rekursive Typen und Produktypen
- Disjunkte Vereinigung durch Unterklassen

```
abstract class Artikel {
  int preis(Artikel a);
  }

class Eier extends Artikel {
  int preis (Stueck n) {... }
```

```
class Apfel extends Artikel {
  private Apfelsorte s;
  Apfel (Apfelsorte s) { this.s= s; }
  int preis(Menge n) {
    return (s.apreis()* n.stueck());
    }
  }
```

- Sonderfälle:
  - Rekursive Typen mit einem konstanten Konstruktor (bspw. Listen)
  - Reine Aufzählungstypen (nur konstante Konstrukturen, `enum`)

Datentypen in C

- C kennt nur Produkte (`struct`)
- Keine disjunkte Vereinigung
- Rekursion nur über Referenzen (Pointer)
- Leere Liste wird durch `NULL` repräsentiert.
- Konstruktoren müssen selbst implementiert werden
- Keine Speicherverwaltung

```
typedef struct mystring_t {
    char    head;
    struct mystring_t *tail;
    } *mystring_t;
```

```
mystring_t mystring(char head, mystring_t tail)
{
  mystring_t this;
  if ((this= (mystring_t)malloc(sizeof(struct mys
    fprintf(stderr, "Out␣of␣memory\n");
    abort();
    }
  this→ head= head; this→ tail= tail;
  return this;
}
```


Zusammenfassung

- Algebraische Datentypen: Aufzählungen, Produkte, rekursive Datentypen
- Drei Schlüsseleigenschaften der Konstruktoren: **disjunkt**, **injektiv**, **erzeugend**
- Rekursive Datentypen sind potenziell **unendlich** (induktiv)
- Funktionen werden durch **Fallunterscheidung** und **Rekursion** definiert
  - Definition des Datentypen bestimmt Funktionsdefinition
- Fallbeispiele: Bob's Shoppe, Zeichenketten