Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 4 vom 06.11.2018: Typvariablen und Polymorphie

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2018/19

Fahrplan

- **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - Einführung
  - Funktionen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Zyklische Datenstrukturen
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Funktionen höherer Ordnung II
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- Letzte Vorlesungen: algebraische Datentypen
- Diese Vorlesung:
  - **Abstraktion** über Typen: Typvariablen und Polymorphie
  - Arten der Polymorphie:
    - Parametrische Polymorphie
    - Ad-hoc Polymorphie

Ähnliche Datentypen der letzten Vorlesung

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

```
data Einkaufswagen = LeererWagen
                   | Einkauf Artikel Menge Einkaufswagen
```

```
data String = Empty
            | Char :+ String
```

- ein **konstanter** Konstruktor
- ein **linear rekursiver** Konstruktor

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

```
kasse :: Einkaufswagen→ Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m+ kasse e
```

```
inventur :: Lager→ Int
inventur LeeresLager = 0
inventur (Lager a m l) = cent a m+ inventur l
```

```
length :: String→ Int
length Empty    = 0
length (c :+ s) = 1+ length s
```

- ein Fall pro Konstruktor
- **linearer** rekursiver Aufruf

Die Lösung: Polymorphie

Definition (Polymorphie)

Polymorphie ist **Abstraktion über Typen**

Arten der Polymorphie

- **Parametrische** Polymorphie (Typvariablen):
  Generisch über alle Typen
- **Ad-Hoc** Polymorphie (Überladung):
  Nur für bestimmte Typen

Anders als in Java (mehr dazu später).

Parametrische Polymorphie

Parametrische Polymorphie: Typvariablen

- **Typvariablen** abstrahieren über Typen

```
data List α = Empty
            | Cons α (List α)
```

- α ist eine **Typvariable**
- List α ist ein **polymorpher** Datentyp
- Signatur der Konstruktoren

```
Empty :: List α
Cons  :: α→ List α→ List α
```

- Typvariable α wird bei Anwendung instantiiert

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme: Typ

  Empty

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
Empty	List α

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
Empty	List α
Cons 57 Empty	

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
Empty	List α
Cons 57 Empty	List Int

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
`Empty`	`List` α
`Cons 57 Empty`	`List Int`
`Cons 7 (Cons 8 Empty)`	

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
Empty	List α
Cons 57 Empty	List Int
Cons 7 (Cons 8 Empty)	List Int

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
`Empty`	`List` α
`Cons 57 Empty`	`List Int`
`Cons 7 (Cons 8 Empty)`	`List Int`
`Cons 'p' (Cons 'i' (Cons '3' Empty))`	

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
`Empty`	`List` α
`Cons 57 Empty`	`List Int`
`Cons 7 (Cons 8 Empty)`	`List Int`
`Cons 'p' (Cons 'i' (Cons '3' Empty))`	`List Char`

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
`Empty`	`List` α
`Cons 57 Empty`	`List Int`
`Cons 7 (Cons 8 Empty)`	`List Int`
`Cons 'p' (Cons 'i' (Cons '3' Empty))`	`List Char`
`Cons True Empty`	

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

	Typ
`Empty`	`List` α
`Cons 57 Empty`	`List Int`
`Cons 7 (Cons 8 Empty)`	`List Int`
`Cons 'p' (Cons 'i' (Cons '3' Empty))`	`List Char`
`Cons True Empty`	`List Bool`

- Nicht typ-korrekt:

  `Cons 'a' (Cons 0 Empty)`

  `Cons True (Cons 'x' Empty)`

  wegen Signatur des Konstruktors:

  `Cons` :: $\alpha \rightarrow$ `List` $\alpha \rightarrow$ `List` α

Polymorphe Funktionen

- Parametrische Polymorphie für **Funktionen**:

```
(++) :: List α→ List α→ List α
Empty ++ t       = t
(Cons c s) ++ t = Cons c (s++ t)
```

  - Typvariable vergleichbar mit Funktionsparameter

- Typvariable α wird bei Anwendung instantiiert:

```
Cons 3 Empty ++ Cons 5 (Cons 57 Empty)
Cons 'p' (Cons 'i' Empty) ++ Cons '3' Empty
```

aber **nicht**

```
Cons True Empty ++ Cons 'a' (Cons 'b' Empty)
```

Beispiel: Der Shop (refaktoriert)

- Einkaufswagen und Lager als Listen?
- Problem: zwei Typen als Argument
- Lösung: zu einem Typ zusammenfassen

```
data Posten = Posten Artikel Menge
```

- Damit:

```
type Lager = [Posten]
```

```
type Einkaufswagen = [Posten]
```

- **Gleicher** Typ!
  - Bug or Feature?

Beispiel: Der Shop (refaktoriert)

- Einkaufswagen und Lager als Listen?
- Problem: zwei Typen als Argument
- Lösung: zu einem Typ zusammenfassen

```
data Posten = Posten Artikel Menge
```

- Damit:

```
type Lager = [Posten]
```

```
type Einkaufswagen = [Posten]
```

- **Gleicher** Typ!
  - Bug or Feature? Bug!
- Lösung: Datentyp **verkapseln**

```
data Lager = Lager [Posten]
```

```
data Einkaufswagen = Ekwg [Posten]
```

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm Typ

```
Pair 4 'x'
```

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm

  `Pair 4 'x'`

  Typ

  `Pair Int Char`

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm — Typ

  `Pair 4 'x'` — `Pair Int Char`

  `Pair (Cons True Empty) 'a'`

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm — Typ

Beispielterm	Typ
`Pair 4 'x'`	`Pair Int Char`
`Pair (Cons True Empty) 'a'`	`Pair (List Bool) Char`

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm | Typ

Beispielterm	Typ
`Pair 4 'x'`	`Pair Int Char`
`Pair (Cons True Empty) 'a'`	`Pair (List Bool) Char`
`Pair (3+4) Empty`	

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm | Typ

Beispielterm	Typ
`Pair 4 'x'`	`Pair Int Char`
`Pair (Cons True Empty) 'a'`	`Pair (List Bool) Char`
`Pair (3+4) Empty`	`Pair Int (List α)`

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm | Typ

Beispielterm	Typ
`Pair 4 'x'`	`Pair Int Char`
`Pair (Cons True Empty) 'a'`	`Pair (List Bool) Char`
`Pair (3+4) Empty`	`Pair Int (List α)`
`Cons (Pair 7 'x') Empty`	

Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)

```
data Pair α β = Pair { left :: α, right :: β }
```

- Signatur Konstruktor und Selektoren:

```
Pair  :: α→ β→ Pair α β
left  :: Pair α β → α
right :: Pair α β → β
```

- Beispielterm | Typ

Beispielterm	Typ
Pair 4 'x'	Pair Int Char
Pair (Cons True Empty) 'a'	Pair (List Bool) Char
Pair (3+4) Empty	Pair Int (List α)
Cons (Pair 7 'x') Empty	List (Pair Int Char)

Vordefinierte Datentypen

Vordefinierte Datentypen: Tupel und Listen

- Eingebauter **syntaktischer Zucker**
- **Listen**

```
data [α] = [] | α : [α]
```

  - Weitere Abkürzungen:
    Listenliterale: [x] für x:[], [x,y] für x:y:[] etc.
    Aufzählungen: [n .. m] und [n, m .. k] für aufzählbare Typen

- **Tupel** sind das kartesische Produkt

```
data (α, β) = ( fst :: α, snd :: β)
```

  - (a, b) = alle Kombinationen von Werten aus a und b
  - Auch n-Tupel: (a,b,c) etc. (aber ohne Selektoren)
  - 0-Tupel: () (*unit type*, Typ mit genau einem Element)

Vordefinierte Datentypen: Optionen

- Existierende Typen:

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```

```
data Resultat = Gefunden Menge | NichtGefunden
```

- Instanzen eines **vordefinierten** Typen:

```
data Maybe α = Nothing | Just α
```

- Vordefinierten Funktionen (**import** Data.Maybe):

```
fromJust     :: Maybe α → α        — partiell
fromMaybe    :: α→ Maybe α→ α
listToMaybe  :: [α]→ Maybe α       — totale Variante von head
maybeToList  :: Maybe α→ [α]       — rechtsinvers zu listToMaybe
```

- Es gilt: listToMaybe (maybeToList m) = m
  length l ≤ 1 ⟹ maybeToList (listToMaybe l) = l

Übersicht: vordefinierte Funktionen auf Listen I

```
(++)     :: [α] → [α] → [α]          — Verketten
(!!)     :: [α] → Int → α            — n-tes Element selektieren
concat   :: [[α]] → [α]              — "flachklopfen"
length   :: [α] → Int                — Länge
head, last :: [α] → α                — Erstes/letztes Element
tail, init :: [α] → [α]              — Hinterer/vorderer Rest
replicate  :: Int → α → [α]          — Erzeuge n Kopien
repeat   :: α → [α]                  — Erzeugt zyklische Liste
take     :: Int → [α] → [α]          — Erste n Elemente
drop     :: Int → [α] → [α]          — Rest nach n Elementen
splitAt  :: Int → [α] → ([α], [α])   — Spaltet an Index n
reverse  :: [α] → [α]                — Dreht Liste um
zip      :: [α] → [β] → [(α, β)]     — Erzeugt Liste von Paaren
unzip    :: [(α, β)] → ([α], [β])    — Spaltet Liste von Paaren
and, or  :: [Bool] → Bool            — Konjunktion/Disjunktion
sum      :: [Int] → Int              — Summe (überladen)
```

Vordefinierte Datentypen: Zeichenketten

- `String` sind Listen von Zeichen:

```
type String = [Char]
```

- Alle vordefinierten Funktionen auf Listen verfügbar.
- **Syntaktischer Zucker** für Stringliterale:

```
"yoho" == ['y','o','h','o'] == 'y':'o':'h':'o':[]
```

- Beispiele:

```
"abc" !! 1 ⇝ 'b'
reverse "oof" ⇝ "foo"
['a','c'..'z'] ⇝ "acegikmoqsuwy"
splitAt 10 "Praktische␣Informatik" ⇝
                ("Praktische","␣Informatik")
```

Typherleitung

Typen in Haskell (The Story So Far)

- Primitive Basisdatentypen: Bool, Double
- Funktionstypen Double→ Int→ Int, [Char] → Double
- Typkonstruktoren: [ ], (. . .), Foo
- Typvariablen

$$\begin{aligned} \mathsf{fst} &:: (\alpha, \beta) \to \alpha \\ \mathsf{length} &:: [\alpha] \to \mathsf{Int} \\ (+\!\!+) &:: [\alpha] \to [\alpha] \to [\alpha] \end{aligned}$$

- Typklassen :

$$\begin{aligned} \mathsf{elem} &:: \mathsf{Eq\ a} \Rightarrow \mathsf{a} \to [\mathsf{a}] \to \mathsf{Bool} \\ \mathsf{max} &:: \mathsf{Ord\ a} \Rightarrow \mathsf{a} \to \mathsf{a} \to \mathsf{a} \end{aligned}$$

Typinferenz: Das Problem

- Gegeben Definition von `f`:

```
f m xs = m + length xs
```

- Frage: welchen Typ hat `f`?
  - Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
- **Informelle** Ableitung

```
f m xs  =  m  +  length  xs
```

Typinferenz: Das Problem

- Gegeben Definition von f:

```
f m xs = m + length xs
```

- Frage: welchen Typ hat f?
  - Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
- **Informelle** Ableitung

$$\begin{array}{cccccc} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} & \mathsf{xs} \\ & & & & [\alpha] \to & \mathsf{Int} \end{array}$$

Typinferenz: Das Problem

- Gegeben Definition von f:

```
f m xs = m + length xs
```

- Frage: welchen Typ hat f?
  - Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
- **Informelle** Ableitung

$$\begin{array}{lllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length\ \ xs} \\ & & & & [\alpha] \to \mathsf{Int} \\ & & & & \quad [\alpha] \end{array}$$

Typinferenz: Das Problem

- Gegeben Definition von f:

```
f m xs = m + length xs
```

- Frage: welchen Typ hat f?
  - Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
- **Informelle** Ableitung

$$\begin{array}{lllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length\ \ xs} \\ & & & & [\alpha] \to \mathsf{Int} \\ & & & & \qquad\qquad [\alpha] \\ & & & & \qquad\quad \mathsf{Int} \end{array}$$

Typinferenz: Das Problem

- Gegeben Definition von f:

```
f m xs = m + length xs
```

- Frage: welchen Typ hat f?
  - Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
- **Informelle** Ableitung

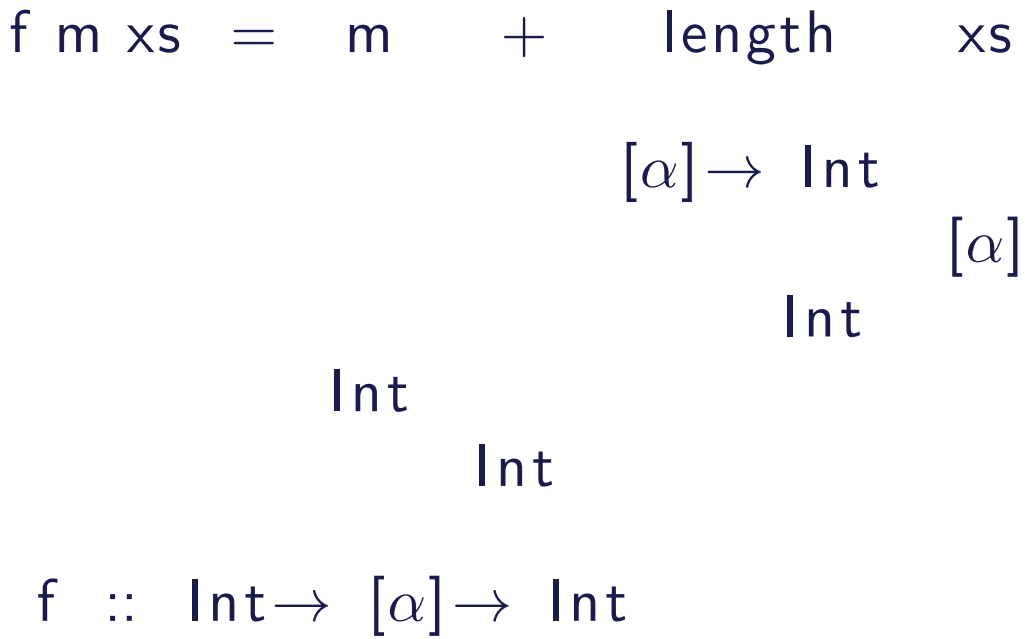
$$\begin{array}{lllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} \quad \mathsf{xs} \\ & & & & [\alpha] \to \mathsf{Int} \\ & & & & \qquad\qquad [\alpha] \\ & & & & \qquad\quad \mathsf{Int} \\ & & \mathsf{Int} & & \end{array}$$

Typinferenz: Das Problem

- Gegeben Definition von f:

```
f m xs = m + length xs
```

- Frage: welchen Typ hat f?
  - Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
- **Informelle** Ableitung



Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

```
f m xs = m + length xs
```

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$\begin{array}{llllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} & \mathsf{xs} \\ & & \alpha & & [\beta] \to \mathsf{Int} & \gamma \end{array}$$

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$\begin{array}{llllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} & \mathsf{xs} \\ & & \alpha & & [\beta] \to \mathsf{Int} & \gamma \\ & & & & & [\beta] \quad \gamma \mapsto [\beta] \end{array}$$

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$\begin{array}{llllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} & \mathsf{xs} \\ & & \alpha & & [\beta] \to \mathsf{Int} & \gamma \\ & & & & & [\beta] \quad \gamma \mapsto [\beta] \\ & & & & \mathsf{Int} & \end{array}$$

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$\begin{array}{llllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} & \mathsf{xs} \\ & & \alpha & & [\beta] \to \mathsf{Int} & \gamma \\ & & & & & [\beta] \quad \gamma \mapsto [\beta] \\ & & & & \mathsf{Int} & \\ & & & \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} & & \end{array}$$

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$\begin{array}{lllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length\ xs} \\ & & \alpha & & [\beta] \to \mathsf{Int} \quad \gamma \\ & & & & [\beta] \quad \gamma \mapsto [\beta] \\ & & & & \mathsf{Int} \\ & & \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} & & \\ & & \mathsf{Int} & & \alpha \mapsto \mathsf{Int} \end{array}$$

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length\ xs} \\
 & & \alpha & & [\beta] \to \mathsf{Int} \quad \gamma \\
 & & & & [\beta] \quad \gamma \mapsto [\beta] \\
 & & & & \mathsf{Int} \\
 & & \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} & & \\
 & & \mathsf{Int} & & \alpha \mapsto \mathsf{Int} \\
 & & \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} & &
\end{array}
$$

Typinferenz (nach Hindley-Milner)

- Typinferenz: **Herleitung** des Typen eines Ausdrucks
- Für bekannte Bezeichner wird Typ eingesetzt
- Für Variablen wird allgemeinster Typ angenommen
- Bei der Funktionsanwendung wird **unifiziert**:

$$\begin{array}{llllll} \mathsf{f\ m\ xs} & = & \mathsf{m} & + & \mathsf{length} & \mathsf{xs} \\ & & \alpha & & [\beta]\to\ \mathsf{Int} & \gamma \\ & & & & & [\beta] \quad \gamma \mapsto [\beta] \\ & & & & \mathsf{Int} & \\ & & \mathsf{Int}\to\ \mathsf{Int}\to\ \mathsf{Int} & & & \\ & & \mathsf{Int} & & & \alpha \mapsto \mathsf{Int} \\ & & \mathsf{Int}\to\ \mathsf{Int} & & & \\ & & & & \mathsf{Int} & \end{array}$$

$$\mathsf{f}\ ::\ \mathsf{Int}\to\ [\beta]\to\ \mathsf{Int}$$

Typinferenz

Theorem (Entscheidbarkeit der Typinferenz)

*Die Typinferenz ist **entscheidbar**, und findet immer den **allgemeinsten** Typ, wenn er existiert.*

- Entscheidbarkeit ist nicht alles.
- Grundsätzliche Komplexität ist $DEXPTIME(n)$ (deterministisch exponentiell), aber in der Praxis ist das **nie** ein Problem.

Typinferenz

- Unifikation kann mehrere Substituitionen beinhalten:

```
f x y =   (x, 3)   :   ('f', y)   :   []
```

Typinferenz

- Unifikation kann mehrere Substituitionen beinhalten:

$$\begin{array}{lccccc} \mathsf{f\ x\ y} = & (\mathsf{x},\ 3) & : & (\text{'f'},\ \mathsf{y}) & : & [\,] \\ & \alpha\ \ \mathsf{Int} & & \mathsf{Char}\ \ \beta & & [\gamma] \end{array}$$

Typinferenz

- Unifikation kann mehrere Substituitionen beinhalten:

$$\begin{array}{lccccc} \texttt{f x y} = & \texttt{(x, 3)} & : & \texttt{('f', y)} & : & \texttt{[]} \\ & \alpha\ \texttt{Int} & & \texttt{Char}\ \beta & & [\gamma] \\ & (\alpha, \texttt{Int}) & & (\texttt{Char}, \beta) & & \end{array}$$

Typinferenz

- Unifikation kann mehrere Substituitionen beinhalten:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathsf{f\ x\ y} = & (\mathsf{x},\ 3) & : & (\text{'f'},\ \mathsf{y}) & : & [\,] \\
& \alpha\ \ \mathsf{Int} & & \mathsf{Char}\ \ \beta & & [\gamma] \\
& (\alpha,\ \mathsf{Int}) & & (\mathsf{Char},\ \beta) & & \\
& & & [(\mathsf{Char},\ \beta)] & & \gamma \mapsto (\mathsf{Char},\ \beta)
\end{array}
$$

Typinferenz

- Unifikation kann mehrere Substituitionen beinhalten:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathsf{f\ x\ y} = & (\mathsf{x},\ 3) & : & (\text{'f'},\ \mathsf{y}) & : & [\,] \\
& \alpha\ \ \mathsf{Int} & & \mathsf{Char}\ \ \beta & & [\gamma] \\
& (\alpha,\ \mathsf{Int}) & & (\mathsf{Char},\ \beta) & & \\
& & & [(\mathsf{Char},\ \beta)] & & \gamma \mapsto (\mathsf{Char},\ \beta) \\
& [(\mathsf{Char},\ \mathsf{Int})] & & & & \beta \mapsto \mathsf{Int}, \alpha \mapsto \mathsf{Char}
\end{array}
$$

Typinferenz

- Unifikation kann mehrere Substituitionen beinhalten:

$$
\begin{array}{lccccc}
\mathsf{f\ x\ y} = & (\mathsf{x},\ 3) & : & (\text{'f'},\ \mathsf{y}) & : & [\,] \\
& \alpha\ \ \mathsf{Int} & & \mathsf{Char}\ \ \beta & & [\gamma] \\
& (\alpha,\ \mathsf{Int}) & & (\mathsf{Char},\ \beta) & & \\
& & & [(\mathsf{Char},\ \beta)] & & \gamma \mapsto (\mathsf{Char},\ \beta) \\
& [(\mathsf{Char},\ \mathsf{Int})] & & & & \beta \mapsto \mathsf{Int}, \alpha \mapsto \mathsf{Char}
\end{array}
$$

$$\mathsf{f} :: \mathsf{Char} \to \mathsf{Int} \to [(\mathsf{Char},\ \mathsf{Int})]$$

- Allgemeinster Typ **muss nicht** existieren (Typfehler!)
  - Bsp: $[\mathsf{True}] +\!\!+ [3]\ , \mathsf{x} : \mathsf{x}$

Ad-Hoc Polymorphie

Ad-Hoc Polymorphie und Overloading

Definition (Überladung)

Funktion f :: a→ b existiert für **mehr als einen**, aber **nicht** für **alle** Typen

- Beispiel:
  - Gleichheit: $(==)$ :: $\alpha\rightarrow$ $\alpha\rightarrow$ Bool
  - Vergleich: $(\leq)$ :: $\alpha\rightarrow$ $\alpha\rightarrow$ Bool
  - Anzeige: show :: $\alpha\rightarrow$ String
- Lösung: **Typklassen**
- Typklassen bestehen aus:
  - **Deklaration** der Typklasse
  - **Instantiierung** für bestimmte Typen

Typklassen: Syntax

- **Deklaration**:

```
class Show α where
  show :: α→ String
```

- **Instantiierung**:

```
instance Show Bool where
  show True  = "Wahr"
  show False = "Falsch"
```

- Prominente vordefinierte Typklassen
  - Eq für $(==)$
  - Ord für $(\leq)$ (und andere Vergleiche)
  - Show für show
  - Num (uvm) für numerische Operationen (Literale überladen)

Typklassen in polymorphen Funktionen

- Element einer Liste (vordefiniert):

```
elem :: Eq α ⇒ α→ [α]→ Bool
elem e []     = False
elem e (x:xs) = e == x || elem e xs
```

- Sortierung einer List: qsort

```
qsort :: Ord α ⇒ [α]→ [α]
```

- Liste ordnen und anzeigen:

```
showsorted :: (Ord α, Show α)⇒ [α]→ String
showsorted x = show (qsort x)
```

Hierarchien von Typklassen

- Typklassen können andere **voraussetzen**:

```
class Eq α⇒ Ord α where
  (<)  :: α→ α→ Bool
  (≤)  :: α→ α→ Bool
  a < b = a ≤ b && a ≠ b
```

- **Default**-Definition von $(<)$

- Kann bei Instantiierung überschrieben werden

Abschließende Bemerkungen

Polymorphie: the missing link

	Parametrisch	Ad-Hoc
Funktionen	f :: $\alpha \rightarrow$ Int	**class** F α **where** f :: a $\rightarrow$ Int
Typen	**data** Maybe α = Just α | Nothing	

Polymorphie: the missing link

	Parametrisch	Ad-Hoc
Funktionen	f :: $\alpha \rightarrow$ Int	**class** F α **where** f :: a $\rightarrow$ Int
Typen	**data** Maybe α = Just α | Nothing	**Konstruktorklassen**

- Kann Entscheidbarkeit der Typherleitung gefährden

Zusammenfassung

- **Abstraktion** über Typen
  - Uniforme Abstraktion: Typvariable, parametrische Polymorphie
  - Fallbasierte Abstraktion: Überladung, ad-hoc-Polymorphie
- In der Sprache Haskell: **Typvariablen** und **Typklassen**
- Wichtige **vordefinierte** Typen:
  - Listen $[\alpha]$
  - Optionen Maybe α
  - Tupel (α, β)