Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 8 vom 04.12.2018: Abstrakte Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2018/19

Organisatorisches

- Morgen ist **Tag der Lehre**
  - Mittwochs-Tutorien **fallen aus**
  - Donnerstags-Tutorien finden statt.
- Abgabe des 8. Übungsblattes in Gruppen zu **drei** Studenten.
  - Bitte **jetzt** eine Gruppe suchen!
- Klausurtermine:
  - Übungsklausur: 17.12.2018 10– 12
  - Hauptklausur: 08.03.2019 10– 14

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- **Teil II: Funktionale Programmierung im Großen**
  - Abstrakte Datentypen
  - Signaturen und Eigenschaften
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- **Abstrakte Datentypen**
  - Allgemeine Einführung
  - Realisierung in Haskell
  - Beispiele

Warum Modularisierung?

- Übersichtlichkeit der Module

  Lesbarkeit
- Getrennte Übersetzung

  technische Handhabbarkeit
- Verkapselung

  konzeptionelle Handhabbarkeit

Abstrakte Datentypen

Definition (Abstrakter Datentyp)

Ein **abstrakter Datentyp** (ADT) besteht aus einem (oder mehreren) **Typen** und **Operationen** darauf, mit folgenden Eigenschaften:

- Werte des Typen können nur über die bereitgestellten Operationen erzeugt werden
- Eigenschaften von Werten des Typen werden nur über die bereitgestellten Operationen beobachtet
- Einhaltung von **Invarianten** über dem Typ kann garantiert werden

Implementation von ADTs in einer Programmiersprache:

- benötigt Möglichkeit der **Kapselung** (Einschränkung der Sichtbarkeit)
- bspw. durch Module oder Objekte

ADTs vs. algebraische Datentypen

- Algebraische Datentypen
  - **Frei erzeugt**
  - Keine Einschränkungen
  - Insbesondere keine Gleichheiten ($[] \neq x{:}xs$, $x{:}ls \neq y{:}ls$ etc.)
- ADTs:
  - Einschränkungen und Invarianten möglich
  - Gleichheiten möglich

ADTs in Haskell: Module

- Einschränkung der Sichtbarkeit durch **Verkapselung**
- **Modul**: Kleinste verkapselbare Einheit
- Ein **Modul** umfaßt:
  - **Definitionen** von Typen, Funktionen, Klassen
  - **Deklaration** der nach außen **sichtbaren** Definitionen
- Gleichzeitig: Modul $\triangleq$ Übersetzungseinheit (getrennte Übersetzung)

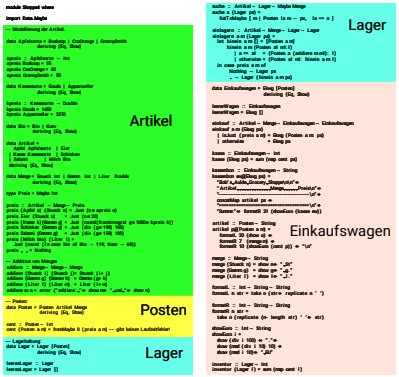
Module: Syntax

- Syntax:

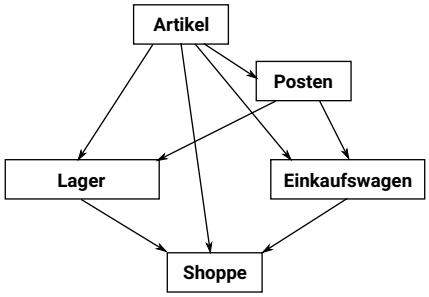
```
module Name(Bezeichner) where Rumpf
```

- Bezeichner können leer sein (dann wird alles exportiert)
- Bezeichner sind:
  - **Typen**: T, T(c1, . . . , cn), T(..)
  - **Klassen**: C, C(f1, . . . , fn), C(..)
  - Andere Bezeichner: **Werte**, **Felder**, **Klassenmethoden**
  - Importierte **Module**: **module** M
- Typsynonyme und Klasseninstanzen bleiben sichtbar
- Module können **rekursiv** sein *(don't try at home)*

Refakturierung im Einkaufsparadies



Refakturierung im Einkaufsparadies: Modularchitektur



Refakturierung im Einkaufsparadies I: Artikel

- Es wird **alles** exportiert
- Reine Datenmodellierung

```
module Artikel where

data Apfelsorte = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
apreis :: Apfelsorte → Int

data Kaesesorte = Gouda | Appenzeller
kpreis :: Kaesesorte → Double

data Menge = Stueck Int | Gramm Int | Liter Double
addiere :: Menge→ Menge→ Menge
```


Refakturierung im Einkaufsparadies II: Posten

```
module Posten(
  Posten,
  artikel,
  menge,
  posten,
  cent,
  hinzu) where
```

- Implementiert ADT Posten:

```
data Posten = Posten { artikel :: Artikel
                     , menge   :: Menge
                     }
```

  - Konstruktor wird **nicht** exportiert
- Garantierte Invariante:
  - Posten hat immer die korrekte Menge zu Artikel

```
posten :: Artikel→ Menge→ Maybe Posten
posten a m =
  case preis a m of
    Just _  → Just (Posten a m)
    Nothing → Nothing
```


Refakturierung im Einkaufsparadies III: Lager

```
module Lager(
  Lager,
  leeresLager,
  einlagern,
  suche,
  liste,
  inventur
  ) where
import Artikel
import Posten
```

- Implementiert ADT Lager

```
data Lager
```

- Signatur der exportierten Funktionen:

```
leeresLager :: Lager

einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager

suche :: Artikel→ Lager→ Maybe Menge

liste :: Lager→ [(Artikel, Menge)]

inventur :: Lager→ Int
```

- Garantierte **Invariante**:
  - Lager enthält keine doppelten Artikel

Refakturierung IV: Einkaufswagen

```
module Einkaufswagen(
  Einkaufswagen,
  leererWagen,
  einkauf,
  kasse,
  kassenbon
  ) where
```

- Implementiert ADT Einkaufswagen

```
data Einkaufswagen = Ekwg [Posten]
```

- Garantierte Invariante:
  - Korrekte Menge zu Artikel im Einkaufswagen

```
einkauf :: Artikel → Menge
                   → Einkaufswagen
                   → Einkaufswagen
einkauf a m (Ekwg ps) =
  case posten a m of
    Just p  →  Ekwg (p: ps)
    Nothing → Ekwg ps
```

  - Nutzt dazu ADT Posten

Refakturierung im Einkaufsparadies V: Hauptmodul

```
module Shoppe where

import Artikel
import Lager
import Einkaufswagen
```

- Nutzt andere Module

```
l0= leeresLager
l1= einlagern (Apfel Boskoop) (Stueck 1) l0
l2= einlagern Schinken (Gramm 50) l1
l3= einlagern (Milch Bio) (Liter 6) l2
l4= einlagern (Apfel Boskoop) (Stueck 4) l3
l5= einlagern (Milch Bio) (Liter 4) l4
l6= einlagern Schinken (Gramm 50) l5
```

Benutzung von ADTs

- **Operationen** und **Typen** müssen **importiert** werden
- Möglichkeiten des Imports:
  - **Alles** importieren
  - **Nur bestimmte** Operationen und Typen importieren
  - Bestimmte Typen und Operationen **nicht** importieren

Importe in Haskell

- Syntax:

```
import [qualified] M [as N] [hiding][(Bezeichner)]
```

- *Bezeichner* geben an, **was** importiert werden soll:
  - Ohne Bezeichner wird alles importiert
  - Mit **hiding** werden Bezeichner **nicht** importiert
- Für jeden exportierten Bezeichner `f` aus `M` wird importiert
  - `f` und qualifizierter Bezeichner `M.f`
  - **qualified**: **nur qualifizierter** Bezeichner `M.f`
  - Umbenennung bei Import mit `as` (dann `N.f`)
  - Klasseninstanzen und Typsynonyme werden immer importiert
- Alle Importe stehen immer am Anfang des Moduls

Beispiel

```
module M(a,b) where...
```

Import(e)	Bekannte Bezeichner
import M	a, b, M.a, M.b
import M()	*(nothing)*
import M(a)	a, M.a
import qualified M	M.a, M.b
import qualified M()	*(nothing)*
import qualified M(a)	M.a
import M **hiding** ()	a, b, M.a, M.b
import M **hiding** (a)	b, M.b
import qualified M **hiding** ()	M.a, M.b
import qualified M **hiding** (a)	M.b
import M as B	a, b, B.a, B.b
import M as B(a)	a, B.a
import qualified M as B	B.a, B.b

Quelle: Haskell98-Report, Sect. 5.3.4

Ein typisches Beispiel

- Modul implementiert Funktion, die auch importiert wird
- Umbenennung nicht immer praktisch
- Qualifizierter Import führt zu **langen** Bezeichnern
- Einkaufswagen implementiert Funktionen `artikel` und `menge`, die auch aus Posten importiert werden:

```
import Posten hiding (artikel, menge)
import qualified Posten as P(artikel, menge)
```

```
artikel p =
  formatL 20 (show (P.artikel p)) ++
  formatR 7  (menge (P.menge p)) ++
  formatR 10 (showEuro (cent p)) ++ "\n"
```


Schnittstelle vs. Implementation

- Gleiche **Schnittstelle** kann unterschiedliche **Implementationen** haben
- Beispiel: (endliche) Abbildungen

Endliche Abbildungen

- Viel gebraucht, oft in Abwandlungen (Hashtables, Sets, Arrays)
- Abstrakter Datentyp für **endliche Abbildungen**:
  - Datentyp

```
data Map α β
```

  - Leere Abbildung:

```
empty :: Map α β
```

  - Abbildung auslesen:

```
lookup :: Ord α⇒ α→ Map α β→ Maybe β
```

  - Abbildung ändern:

```
insert :: Ord α⇒ α→ β→ Map α β→ Map α β
```

  - Abbildung löschen:

```
delete :: Ord α⇒ α→ Map α β→ Map α β
```


Eine naheliegende Implementation

- Modellierung als Haskell-Funktion:

```
data Map α β = Map (α→ Maybe β)
```

- Damit einfaches `lookup`, `insert`, `delete`:

```
empty = Map (λx→ Nothing)
```

```
lookup a (Map s) = s a
```

```
insert a b (Map s) =
  Map (λx→ if x == a then Just b else s x)
```

```
delete a (Map s) =
  Map (λx→ if x == a then Nothing else s x)
```

- Instanzen von Eq, Show **nicht möglich**
- **Speicherleck**: überschriebene Zellen werden nicht freigegeben

Endliche Abbildungen: Anwendungsbeispiel

- Lager als endliche Abbildung:

```
data Lager = Lager (M.Map Artikel Menge)
```

- Artikel suchen:

```
suche :: Artikel→ Lager→ Maybe Menge
suche a (Lager l) = M.lookup a l
```

- Ins Lager hinzufügen:

```
einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager
einlagern a m (Lager l) =
 case posten a m of
   Just _  → case M.lookup a l of
     Just q  → Lager (M.insert a (addiere m q) l)
     Nothing → Lager (M.insert a m l)
   Nothing → Lager l
```

- Für Inventur fehlt Möglichkeit zur **Iteration**
- Daher: Map als **Assoziativliste**

Map als sortierte Assoziativliste

```
data Map α β = Map { toList :: [(α, β)] }
```

- Einfache Implementierung:

```
insert :: Ord α⇒ α→ β→ Map α β→ Map α β
insert a v (Map s) = Map (insert' s) where
  insert' []          = [(a, v)]
  insert' s0@((b, w):s) | a > b = (b, w): insert' s
                        | a == b = (a, v): s
                        | a < b = (a, v): s0
```

- Zusatzfunktionalität:
  - Iteration (Selektor `toList`)
  - Instanzen von Eq und Show (abgeleitet)
- ... ist aber **ineffizient** (Zugriff/Löschen in $\mathcal{O}(n)$)
- Deshalb: balancierte Bäume

AVL-Bäume und Balancierte Bäume

AVL-Bäume

Ein Baum ist **ausgeglichen**, wenn

- alle Unterbäume ausgeglichen sind, und
- der Höhenunterschied zwischen zwei Unterbäumen höchstens eins beträgt.

Balancierte Bäume

Ein Baum ist **balanciert**, wenn

- alle Unterbäume balanciert sind, und
- für den linken und rechten Unterbaum l, r gilt:

$$size(l) \leq w \cdot size(r) \quad (1)$$
$$size(r) \leq w \cdot size(l) \quad (2)$$

w — **Gewichtung** (Parameter des Algorithmus)

Implementation von balancierten Bäumen

- Der Datentyp

```
data Tree α = Null
            | Node Int (Tree α) α (Tree α)
                                  deriving Eq
```

- Gewichtung (Parameter des Algorithmus):

```
weight :: Int
```

- Hilfskonstruktor, setzt Größe (`l`, `r` balanciert)

```
node :: Tree α→ α→ Tree α→ Tree α
```

- Selektor: Größe des Baumes (0 für `Null`)

```
size :: Tree α→ Int
```


Implementation von balancierten Bäumen

- Hilfskonstruktor, balanciert ggf. neu aus:

```
mkNode :: Tree α→ α→ Tree α→ Tree α
```

  - Voraussetzungen:
    - `l`, `r` balanciert
    - Gesamtbaum "fast" balanciert:

$$size(l) - 1 \leq w \cdot size(r) \quad (3)$$
$$size(r) - 1 \leq w \cdot size(l) \quad (4)$$

  - Wird beim Löschen und Einfügen benutzt

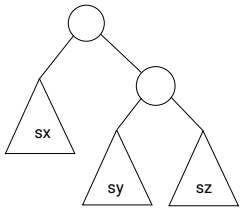
Balance sicherstellen

- Problem:

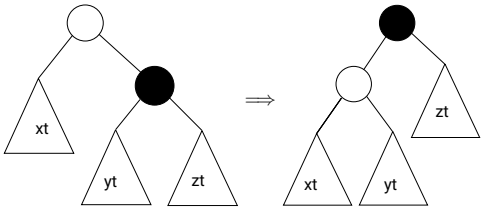
  Nach Löschen oder Einfügen zu großes Ungewicht

- Lösung:

  Rotieren der Unterbäume

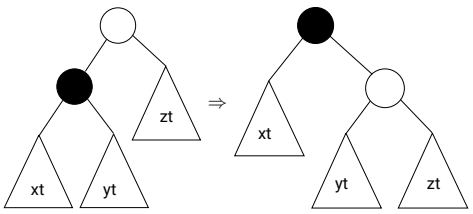


Linksrotation




```
rotl :: Tree α→ Tree α
rotl (Node _ xt y (Node _ yt x zt)) =
  node (node xt y yt) x zt
```

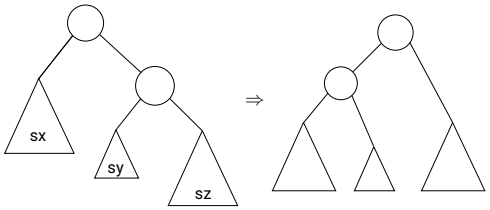

Rechtsrotation




```
rotr :: Tree α→ Tree α
rotr (Node _ (Node _ ut y vt) x rt) =
  node ut y (node vt x rt)
```

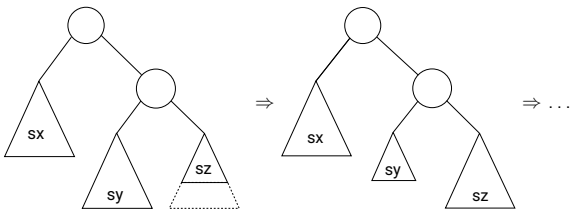

Balanciertheit sicherstellen

- Fall 1: Äußerer Unterbaum zu groß
- Lösung: Linksrotation



Balanciertheit sicherstellen

- Fall 2: Innerer Unterbaum zu groß oder gleich groß
- Reduktion auf vorherigen Fall durch Rechtsrotation des Unterbaumes



Balance sicherstellen

- Hilfsfunktion: **Balance** eines Baumes

```
bias :: Tree α→ Ordering
bias Null = EQ
bias (Node _ lt _ rt) = compare (size lt) (size rt)
```

- Zu implementieren: mkNode lt y rt
  - Voraussetzung: lt, rt balanciert
  - Konstruiert neuen balancierten Baum mit Knoten y
- Fallunterscheidung:
  - rt zu groß, zwei Unterfälle:
    - Linker Unterbaum von rt kleiner (Fall 1): bias rt == LT
    - Linker Unterbaum von rt größer/gleich groß (Fall 2): bias rt == EQ, bias rt == GT
  - lt zu groß, zwei Unterfälle (symmetrisch).

Konstruktion eines ausgeglichenen Baumes

- Voraussetzung: lt, rt balanciert

```
mkNode :: Tree α→ α→ Tree α→ Tree α
mkNode lt x rt
  | ls+rs < 2  = node lt x rt
  | weight* ls < rs =
      if bias rt == LT then rotl (node lt x rt)
      else rotl (node lt x (rotr rt))
  | ls > weight* rs =
      if bias lt == GT then rotr (node lt x rt)
      else rotr (node (rotl lt) x rt)
  | otherwise  = node lt x rt where
    ls = size lt; rs= size rt
```


Balancierte Bäume als Maps

- Endliche Abbildung: Bäume mit (key, value) Paaren
- lookup' liest Element aus:

```
lookup' :: Ord α⇒ α→ Tree (α, β)→ Maybe β
```

- insert' fügt neues Element ein:

```
insert' :: Ord α⇒ α→ β→ Tree (α, β)→ Tree (α, β)
insert' k v Null = node Null (k, v) Null
insert' k v (Node n l a@(kn, _) r)
  | k < kn  = mkNode (insert' k v l) a r
  | k == kn = Node n l (k, v) r
  | k > kn  = mkNode l a (insert' k v r)
```

- remove' löscht ein Element
  - Benötigt Hilfsfunktion join :: Tree α→Tree α→Tree α

Zusammenfassung Balancierte Bäume

- Verkapselung des Datentypen:

```
data Map α β = Map { tree :: Tree (α, β) }

insert :: Ord α⇒ α→ β→ Map α β→ Map α β
insert k v (Map t) = Map (insert' k v t)
```

- Auslesen, einfügen und löschen: logarithmischer Aufwand ($\mathcal{O}(\log n)$)
- Fold: linearer Aufwand ($\mathcal{O}(n)$)
- Guten durchschnittlichen Aufwand
- Auch in der Haskell-Bücherei: Data.Map (mit vielen weiteren Funktionen)

Benchmarking: Setup

- Wie **schnell** sind die Implementationen **wirklich**?
- Benchmarking: nicht trivial
  - Verzögerte Auswertung und optimierender Compiler
  - Messen wir das **richtige**?
  - Benchmarking-Tool: Criterion
- Setup: Map Int String mit 50000 zufälligen Einträgen erzeugen
- Darin:
  - Einmal zufällig lesen (lookup), schreiben (insert), löschen (delete)
  - Sequenz aus fünfmal löschen und schreiben, zweihundertmal lesen (mixed)

Benchmarking: Resultate

	create	lookup	insert	delete	mixed
(1)	358.4 ms	2.66 ms	10.75 ns	10.90 ns	1.83 ms
	7.483 ms	134.70 µs	159.70 ps	170.90 ps	111.80 µs
(2)	6.20 s	11.57 µs	133.8 µs	148.40 µs	5.67 ms
	37.59 ms	351.3 ns	2.36 µs	1.99 µs	128.10 µs
(3)	470.00 ms	265.10 ns	138.90 µs	137.60 µs	2.18 ms
	2.69 ms	4.54 ns	2.35 µs	3.00 µs	81.68 µs
(4)	392.7 ms	189.2 ns	135.7 µs	134.50 µs	2.08 ms
	5.02 ms	13.41 ns	2.00 µs	3.10 µs	80.22 µs

(1) MapFun, (2) MapList, (3) MapWeighted, (4) Data.Map.Lazy
Einträge: durchschnittl. Ausführungszeit, Standardabweichung

Defizite von Haskells Modulsystem

- Signatur ist nur **implizit**
  - Exportliste enthält nur Bezeichner
  - Wünschenswert: Signatur an der Exportliste annotierbar, oder Signaturen in separater Datei
  - In Java: **Interfaces**
- Klasseninstanzen werden **immer** exportiert.
- Kein **Paket-System**

ADTs vs. Objekte

- ADTs (Haskell): **Typ** plus **Operationen**
- Objekte (z.B. Java): **Interface**, **Methoden**.
- **Gemeinsamkeiten**:
  - Verkapselung (information hiding) der Implementation
- **Unterschiede**:
  - Objekte haben internen Zustand, ADTs sind referentiell transparent;
  - Objekte haben Konstruktoren, ADTs nicht (Konstruktoren nicht unterscheidbar)
  - Vererbungsstruktur auf Objekten (Verfeinerung für ADTs)
  - Java: `interface` eigenes Sprachkonstrukt
  - Java: `packages` für Sichtbarkeit

Zusammenfassung

- **Abstrakte Datentypen** (ADTs):
  - Besteht aus **Typen** und **Operationen** darauf
- Realisierung in Haskell durch **Module**
- Beispieldatentypen: endliche Abbildungen
- Nächste Vorlesung: ADTs durch **Eigenschaften** spezifizieren