

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 2 vom 25.10.2016: Funktionen und Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2016/17

16.02.20 2017-01-17

1 [38]



Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Algebraische Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II und Effizienzaspekte
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

PI3 WS 16/17

2 [38]



Inhalt

- ▶ Organisatorisches
- ▶ Definition von Funktionen
 - ▶ Syntaktische Feinheiten
- ▶ Bedeutung von Haskell-Programmen
 - ▶ Striktheit
- ▶ Definition von Datentypen
 - ▶ Aufzählungen
 - ▶ Produkte

PI3 WS 16/17

3 [38]



Organisatorisches

- ▶ Verteilung der Tutorien (laut stud.ip):

Mi	08 – 10	GW1 A0160	Berthold Hoffmann	16 (50)	4
	10 – 12	GW1 A0160	Johannes Ganser	43 (50)	9
	12 – 14	MZH 1110	Johannes Ganser	35 (35)	9
	14 – 16	GW1 B2070	Alexander Kurth	25 (25)	7
Do	08 – 10	MZH 1110	Tobias Brandt	33 (35)	10
	10 – 12	GW1 B2130	Tristan Bruns	25 (25)	11

- ▶ Insgesamt 50 Gruppen (ca. 8 pro Tutorium)
- ▶ Wenn möglich, frühes Mittwochstutorium belegen.

PI3 WS 16/17

4 [38]



Definition von Funktionen

PI3 WS 16/17

5 [38]



Definition von Funktionen

- ▶ Zwei wesentliche Konstrukte:

- ▶ Fallunterscheidung
- ▶ Rekursion

Satz

Fallunterscheidung und Rekursion auf natürlichen Zahlen sind Turing-mächtig.

- ▶ Funktionen müssen partiell sein können.

PI3 WS 16/17

6 [38]



Haskell-Syntax: Charakteristika

- ▶ Leichtgewichtig
 - ▶ Wichtigstes Zeichen:
- ▶ Funktionsapplikation: $f\ a$
 - ▶ Keine Klammern
 - ▶ Höchste Priorität (engste Bindung)
- ▶ Abseitsregel: Gültigkeitsbereich durch Einrückung
 - ▶ Keine Klammern (`{ ... }`)
- ▶ Auch in anderen Sprachen (Python, Ruby)

PI3 WS 16/17

7 [38]



Haskell-Syntax: Funktionsdefinition

Generelle Form:

- ▶ Signatur:

```
max :: Int -> Int -> Int
```

- ▶ Definition:

```
max x y = if x < y then y else x
```

- ▶ Kopf, mit Parametern
- ▶ Rumpf (evtl. länger, mehrere Zeilen)
- ▶ Typisches Muster: Fallunterscheidung, dann rekursiver Aufruf
- ▶ Was gehört zum Rumpf (Geltungsbereich)?

PI3 WS 16/17

8 [38]



Haskell-Syntax I: Die Abseitsregel

Funktionsdefinition:

$$f\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n = E$$

- ▶ **Geltungsbereich** der Definition von f :
alles, was gegenüber f eingerückt ist.

- ▶ Beispiel:

```
f x = hier faengts an
    und hier gehts weiter
      immer weiter
g y z = und hier faengt was neues an
```

- ▶ Gilt auch verschachtelt.
- ▶ Kommentare sind *passiv* (heben das Abseits nicht auf).



Haskell-Syntax II: Kommentare

- ▶ Pro Zeile: Ab `--` bis Ende der Zeile

```
f x y = irgendwas  -- und hier der Kommentar!
```

- ▶ Über mehrere Zeilen: Anfang `{-`, Ende `-}`

```
{-
  Hier faengt der Kommentar an
  erstreckt sich ueber mehrere Zeilen
  bis hier                               -}
f x y = irgendwas
```

- ▶ Kann geschachtelt werden.



Haskell-Syntax III: Bedingte Definitionen

- ▶ Statt verschachtelter Fallunterscheidungen ...

```
f x y = if B1 then P else
        if B2 then Q else...
```

... **bedingte Gleichungen**:

```
f x y
| B1 =...
| B2 =...
```

- ▶ Auswertung der Bedingungen von oben nach unten
- ▶ Wenn keine Bedingung wahr ist: **Laufzeitfehler!** Deshalb:

```
| otherwise =...
```



Haskell-Syntax IV: Lokale Definitionen

- ▶ Lokale Definitionen mit **where** oder **let**:

```
f x y
| g = P y
| otherwise = f x where
  y = M
  f x = N x

f x y =
  let y = M
      f x = N x
  in if g then P y
      else f x
```

- ▶ f, y, \dots werden **gleichzeitig** definiert (Rekursion!)
- ▶ Namen f, y und Parameter (x) **überlagern** andere
- ▶ Es gilt die **Abseitsregel**
 - ▶ Deshalb: Auf **gleiche** Einrückung der lokalen Definition achten!



Bedeutung von Funktionen



Bedeutung (Semantik) von Programmen

- ▶ **Operationale** Semantik:
 - ▶ Durch den **Ausführungsbegriff**
 - ▶ Ein Programm ist, was es tut.
- ▶ **Denotationelle** Semantik:
 - ▶ Programme werden auf **mathematische Objekte** abgebildet (Denotat).
 - ▶ Für funktionale Programme: **rekursiv** definierte Funktionen

Äquivalenz von operationaler und denotationaler Semantik

Sei P ein funktionales Programm, \rightarrow_P die dadurch definierte Reduktion, und $\llbracket P \rrbracket$ das Denotat. Dann gilt für alle Ausdrücke t und Werte v

$$t \rightarrow_P v \iff \llbracket P \rrbracket(t) = v$$



Auswertungsstrategien

```
inc :: Int -> Int
inc x = x+1
```

```
double :: Int -> Int
double x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von `inc (double (inc 3))`
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):
$$\begin{aligned} \text{inc (double (inc 3))} &\rightarrow \text{double (inc 3)+1} \\ &\rightarrow 2*(\text{inc 3})+1 \\ &\rightarrow 2*(3+1)+1 \\ &\rightarrow 2*4+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$
- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):
$$\begin{aligned} \text{inc (double (inc 3))} &\rightarrow \text{inc (double (3+1))} \\ &\rightarrow \text{inc (2*(3+1))} \\ &\rightarrow (2*(3+1))+1 \\ &\rightarrow 2*4+1 \rightarrow 9 \end{aligned}$$



Auswertungsstrategien

```
addx :: String -> String
addx s = 'x': s
```

```
double :: String -> String
double s = s++ s
```

- ▶ Reduktion von `addx (double (addx "y"))`
- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):
$$\begin{aligned} \text{addx (double (addx "y"))} &\rightarrow 'x':\text{double (addx "y")} \\ &\rightarrow 'x':(\text{addx "y"} ++ \text{addx "y"}) \\ &\rightarrow 'x':(('x': "y") ++ \text{addx "y"}) \\ &\rightarrow 'x':(('x': "y") ++ ('x': "y")) \\ &\rightarrow "xxyxy" \end{aligned}$$
- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):
$$\begin{aligned} \text{addx (double (addx "y"))} &\rightarrow \text{addx (double ('x': "y"))} \\ &\rightarrow \text{addx (double ("xy"))} \\ &\rightarrow \text{addx ("xy" ++ "xy")} \\ &\rightarrow \text{addx "xyxy"} \\ &\rightarrow 'x': "xyxy" \rightarrow "xxyxy" \end{aligned}$$



Konfluenz

- ▶ Sei \rightarrow^* die Reduktion in null oder mehr Schritten.

Definition (Konfluenz)

\rightarrow^* ist **konfluent** gdw:
Für alle r, s, t mit $s \xrightarrow{*} r \xrightarrow{*} t$ gibt es u so dass $s \xrightarrow{*} u \xrightarrow{*} t$.

- ▶ Wenn wir von Laufzeitfehlern abstrahieren, gilt:

Theorem (Konfluenz)

Funktionale Programme sind für jede Auswertungsstrategie **konfluent**.



Termination und Normalform

Definition (Termination)

\rightarrow ist **terminierend** gdw. es keine unendlichen Ketten gibt:
 $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \dots t_n \rightarrow \dots$

Theorem (Normalform)

Terminierende funktionale Programme werten unter jeder Auswertungsstrategie jeden Ausdruck zum gleichen Wert aus (der **Normalform**).

- ▶ Auswertungsstrategie für **nicht-terminierende** Programme relevant.
- ▶ Nicht-Termination **nötig** (Turing-Mächtigkeit)



Auswirkung der Auswertungsstrategie

- ▶ Outermost-first entspricht **call-by-need**, verzögerte Auswertung.
- ▶ Innermost-first entspricht **call-by-value**, strikte Auswertung
- ▶ Beispiel:

```
repeat :: Int -> String -> String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- ▶ Auswertung von `repeat 0 undef`



Striktheit

Definition (Striktheit)

Funktion f ist **strikt** \iff Ergebnis ist undefiniert sobald ein Argument undefiniert ist.

- ▶ **Denotationelle** Eigenschaft (nicht operational)
- ▶ Java, C etc. sind **call-by-value** (nach Sprachdefinition) und damit **strikt**
- ▶ Haskell ist **nicht-strikt** (nach Sprachdefinition)
 - ▶ `repeat0 undef` **muss** "" ergeben.
 - ▶ Meisten Implementationen nutzen **verzögerte Auswertung**
- ▶ Fallunterscheidung ist **immer** nicht-strikt.



Datentypen



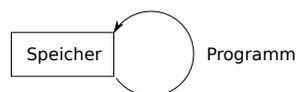
Datentypen als Modellierungskonstrukt

Programme **manipulieren** ein **Modell** (der Umwelt)

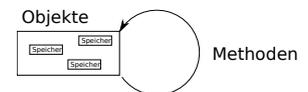
- ▶ Funktionale Sicht:



- ▶ Imperative Sicht:



- ▶ Objektorientierte Sicht:



Typkonstruktoren

- ▶ Aufzählungen
- ▶ Produkt
- ▶ Rekursion
- ▶ Funktionsraum



Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe



Ein Tante-Emma Laden wie in früheren Zeiten.



Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Äpfel	Boskoop	55	ct/Stk
	Cox Orange	60	ct/Stk
	Granny Smith	50	ct/Stk
Eier		20	ct/Stk
Käse	Gouda	14.50	€/kg
	Appenzeller	22.70	€/kg
Schinken		1.99	€/100 g
Salami		1.59	€/100 g
Milch		0.69	€/l
	Bio	1.19	€/l

PI3 WS 16/17

25 [38]



Aufzählungen

- ▶ Aufzählungen: Menge von **disjunkten** Konstanten

$Apfel = \{Boskoop, Cox, Smith\}$

$Boskoop \neq Cox, Cox \neq Smith, Boskoop \neq Smith$

- ▶ Genau drei **unterschiedliche** Konstanten

- ▶ Funktion mit **Wertebereich** *Apfel* muss drei Fälle unterscheiden

- ▶ Beispiel: $preis : Apfel \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$preis(a) = \begin{cases} 55 & a = Boskoop \\ 60 & a = Cox \\ 50 & a = Smith \end{cases}$$

PI3 WS 16/17

26 [38]



Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- ▶ **Definition**

```
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

- ▶ Implizite Deklaration der **Konstruktoren** `Boskoop :: Apfel` als Konstanten

- ▶ Großschreibung der Konstruktoren

- ▶ **Fallunterscheidung:**

```
apreis :: Apfel -> Int
apreis a = case a of
  Boskoop -> 55
  CoxOrange -> 60
  GrannySmith -> 50
```

```
data Farbe = Rot | Grn
farbe :: Apfel -> Farbe
farbe d =
  case d of
    GrannySmith -> Grn
    _ -> Rot
```

PI3 WS 16/17

27 [38]



Fallunterscheidung in der Funktionsdefinition

- ▶ Abkürzende Schreibweisen (**syntaktischer Zucker**):

$$\begin{array}{l} f \ c_1 == e_1 \\ \dots \\ f \ c_n == e_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} f \ x == \text{case } x \text{ of } c_1 \rightarrow e_1, \\ \dots \\ c_n \rightarrow e_n \end{array}$$

- ▶ Damit:

```
apreis :: Apfel -> Int
apreis Boskoop = 55
apreis CoxOrange = 60
apreis GrannySmith = 50
```

PI3 WS 16/17

28 [38]



Der einfachste Aufzählungstyp

- ▶ **Einfachste** Aufzählung: Wahrheitswerte

$Bool = \{False, True\}$

- ▶ Genau zwei unterschiedliche Werte

- ▶ **Definition** von Funktionen:

- ▶ **Wertetabellen** sind explizite Fallunterscheidungen

\wedge	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i> \wedge <i>true</i> = <i>true</i>
	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i> \wedge <i>false</i> = <i>false</i>
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i> \wedge <i>true</i> = <i>false</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i> \wedge <i>false</i> = <i>false</i>

PI3 WS 16/17

29 [38]



Wahrheitswerte: Bool

- ▶ **Vordefiniert** als

```
data Bool = False | True
```

- ▶ Vordefinierte **Funktionen:**

```
not :: Bool -> Bool      — Negation
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool — Konjunktion
(||) :: Bool -> Bool -> Bool — Disjunktion
```

- ▶ **Konjunktion** definiert als

```
a && b = case a of
  False -> False
  True -> b
```

- ▶ **&&, ||** sind rechts nicht strikt

- ▶ $1 = 0 \ \&\& \ \text{div} \ 1 \ 0 = 0 \rightarrow \text{False}$

- ▶ **if _ then _ else _** als syntaktischer Zucker:

$\text{if } b \text{ then } p \text{ else } q \rightarrow \text{case } b \text{ of } \text{True} \rightarrow p, \text{False} \rightarrow q$

PI3 WS 16/17

30 [38]



Produkte

- ▶ Konstruktoren können **Argumente** haben

- ▶ Beispiel: Ein **Datum** besteht aus **Tag, Monat, Jahr**

- ▶ Mathematisch: Produkt (Tupel)

$Date = \{Date(n, m, y) \mid n \in \mathbb{N}, m \in Month, y \in \mathbb{N}\}$
 $Month = \{Jan, Feb, Mar, \dots\}$

- ▶ **Funktionsdefinition:**

- ▶ Konstruktorenargumente sind **gebundene Variablen**

$year(D(n, m, y)) = y$
 $day(D(n, m, y)) = n$

- ▶ Bei der **Auswertung** wird **gebundene Variable** durch konkretes Argument ersetzt

PI3 WS 16/17

31 [38]



Produkte in Haskell

- ▶ Konstruktoren mit **Argumenten:**

```
data Date = Date Int Month Int
data Month = Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun
           | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec
```

- ▶ **Beispielwerte:**

```
today = Date 25 Oct 2016
bloomsday = Date 16 Jun 1904
```

- ▶ Über **Fallunterscheidung** Zugriff auf **Argumente** der Konstruktoren:

```
day :: Date -> Int
year :: Date -> Int
day d = case d of Date t m y -> t
year (Date _ _ y) = y
```

PI3 WS 16/17

32 [38]



Beispiel: Tag im Jahr

- ▶ Tag im Jahr: Tag im laufenden Monat plus Summe der Anzahl der Tage der vorherigen Monate

```
yearDay :: Date → Int
yearDay (Date d m y) = d + sumPrevMonths m where
  sumPrevMonths :: Month → Int
  sumPrevMonths Jan = 0
  sumPrevMonths m = daysInMonth (prev m) y +
    sumPrevMonths (prev m)
```

- ▶ Tage im Monat benötigt Jahr als Argument (Schaltjahr!)

```
daysInMonth :: Month → Int → Int
```

```
prev :: Month → Month
```

- ▶ Schaltjahr: Gregorianischer Kalender

```
leapyear :: Int → Bool
leapyear y = if mod y 100 == 0 then mod y 400 == 0
             else mod y 4 == 0
```

PI3 WS 16/17

33 [38]



Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- ▶ Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaese = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaese → Double
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

- ▶ Alle Artikel:

```
data Artikel =
  Apfel Apfel | Eier
  | Kaese Kaese | Schinken
  | Salami | Milch Bool
```

PI3 WS 16/17

34 [38]



Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- ▶ Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int
            | Kilo Double | Liter Double
```

- ▶ Der Preis und seine Berechnung:

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```

```
preis :: Artikel → Menge → Preis
preis (Apfel a) (Stueck n) = Cent (n * apreis a)
preis Eier (Stueck n) = Cent (n * 20)
preis (Kaese k) (Kilo kg) = Cent (round (kg *
                                   kpreis k))
preis Schinken (Gramm g) = Cent (g / 100 * 199)
preis Salami (Gramm g) = Cent (g / 100 * 159)
preis (Milch bio) (Liter l) =
  Cent (round (l * if not bio then 69 else 119))
preis _ _ = Ungueltig
```

PI3 WS 16/17

35 [38]



Auswertung der Fallunterscheidung

- ▶ Argument der Fallunterscheidung wird **nur soweit nötig** ausgewertet

- ▶ Beispiel:

```
data Foo = Foo Int | Bar
```

```
f :: Foo → Int
f foo = case foo of Foo i → i; Bar → 0
```

```
g :: Foo → Int
g foo = case foo of Foo i → 9; Bar → 0
```

- ▶ Auswertungen:

```
f Bar → 0
f (Foo undefined) → *** Exception: undefined
g Bar → 0
g (Foo undefined) → 9
```

PI3 WS 16/17

36 [38]



Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

- Definition eines **algebraischen Datentypen** T:

```
data T = C1 t1,1 ... t1,k1
      | C2 t2,1 ... t2,k2
      ...
      | Cn tn,1 ... tn,kn
```

1. Konstruktoren C_1, \dots, C_n sind **disjunkt**:

$$C_i x_1 \dots x_n = C_j y_1 \dots y_m \implies i = j$$

2. Konstruktoren sind **injektiv**:

$$C x_1 \dots x_n = C y_1 \dots y_n \implies x_i = y_i$$

3. Konstruktoren **erzeugen** den Datentyp:

$$\forall x \in T. x = C_j y_1 \dots y_m$$

Diese Eigenschaften machen **Fallunterscheidung** möglich.

Rekursion? → **Nächste Vorlesung!**

PI3 WS 16/17

37 [38]



Zusammenfassung

- ▶ **Striktheit**

- ▶ Haskell ist **spezifiziert** als nicht-strikt

- ▶ Datentypen und Funktionsdefinition **dual**

- ▶ **Aufzählungen** — Fallunterscheidung

- ▶ **Produkte** — Projektion

- ▶ **Algebraische Datentypen**

- ▶ **Drei wesentliche Eigenschaften** der Konstruktoren

- ▶ **Nächste Vorlesung**: Rekursive Datentypen

PI3 WS 16/17

38 [38]

