

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 1 vom 13.10.2014: Einführung

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2721

1 [24]

Personal

▶ Vorlesung:

Christoph Lüth cx1@informatik.uni-bremen.de
MZH 3110, Tel. 59830

▶ Tutoren:

Jan Radtke jradtke@informatik.uni-bremen.de
Sandor Herms sanherms@informatik.uni-bremen.de
Daniel Müller dmueller@informatik.uni-bremen.de
Felix Thielke fthielke@informatik.uni-bremen.de
Sören Schulze sschulze@informatik.uni-bremen.de
Henrik Reichmann henrikr@informatik.uni-bremen.de

▶ Fragestunde:

Berthold Hoffmann hof@informatik.uni-bremen.de

▶ Webseite: www.informatik.uni-bremen.de/~cx1/lehre/pi3.ws14

2 [24]

Termine

- ▶ **Vorlesung:** Di 12 – 14, MZH 1380/1400
- ▶ **Tutorien:**

Mi	08 – 10	MZH 1110	Sören Schulze
Mi	10 – 12	MZH 1470	Sandor Herms
Mi	12 – 14	MZH 1110	Henrik Reichmann
Mi	14 – 16	SFG 1020	Felix Thielke
Do	08 – 10	MZH 1110	Jan Radtke
Do	10 – 12	MZH 1090	Daniel Müller
- ▶ **Fragestunde:** Di 10 – 12 Berthold Hoffmann (Cartesium 2.048)
- ▶ **Anmeldung** zu den Übungsgruppen über stud.ip

3 [24]

Übungsbetrieb

- ▶ Ausgabe der Übungsblätter über die Webseite **Dienstag abend**
- ▶ Besprechung der Übungsblätter in den Tutorien
- ▶ **Bearbeitungszeit:** eine Woche
- ▶ **Abgabe:** elektronisch bis **Freitag** nächste Woche **12:00**
- ▶ **Elf** Übungsblätter (voraussichtlich) plus 0. Übungsblatt
- ▶ Übungsgruppen: max. **drei Teilnehmer** (nur in Ausnahmefällen vier)

4 [24]

Scheinkriterien

- ▶ Von n Übungsblättern werden $n - 1$ bewertet (geplant $n = 11$)
- ▶ **Insgesamt** mind. 50% aller Punkte
- ▶ **Notenspiegel** (in Prozent aller Punkte):

Pkt.%	Note	Pkt.%	Note	Pkt.%	Note	Pkt.%	Note
≥ 95	1.0	89.5-85	1.7	74.5-70	2.7	59.5-55	3.7
94.5-90	1.3	84.5-80	2.0	69.5-65	3.0	54.5-50	4.0
		79.5-75	2.3	64.5-60	3.3	49.5-0	n/b

- ▶ **Fachgespräch** (Individualität der Leistung) am Ende

5 [24]

Spielregeln

- ▶ **Quellen angeben** bei
 - ▶ Gruppenübergreifender Zusammenarbeit;
 - ▶ Internetrecherche, Literatur, etc.
- ▶ **Erster Täuschungsversuch:** **Null** Punkte
- ▶ **Zweiter Täuschungsversuch:** **Kein Schein.**
- ▶ **Deadline verpaßt?**
 - ▶ **Triftiger Grund** (z.B. Krankheit mehrerer Gruppenmitglieder)
 - ▶ **Vorher** ankündigen, sonst **null** Punkte.

6 [24]

Fahrplan

- ▶ **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
 - ▶ **Einführung**
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ **Teil II: Funktionale Programmierung im Großen**
- ▶ **Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben**

7 [24]

Warum funktionale Programmierung lernen?

- ▶ Denken in **Algorithmen**, nicht in **Programmiersprachen**
- ▶ **Abstraktion:** Konzentration auf das Wesentliche
- ▶ **Wesentliche** Elemente moderner Programmierung:
 - ▶ Datenabstraktion und Funktionale Abstraktion
 - ▶ Modularisierung
 - ▶ Typisierung und Spezifikation

8 [24]

The Future is Bright — The Future is Functional

- ▶ Blick über den Tellerrand — Blick in die Zukunft
- ▶ Studium \neq Programmierkurs — was kommt in 10 Jahren?
- ▶ Funktionale Programmierung ist bereit für die Herausforderungen der Zukunft:
 - ▶ Nebenläufige Systeme (Mehrkernarchitekturen)
 - ▶ Vielfach vernetzte Rechner („Internet der Dinge“)
 - ▶ Große Datenmengen („Big Data“)

9 [24]

Warum Haskell?

- ▶ **Moderne** Sprache
- ▶ Standardisiert, mehrere **Implementationen**
 - ▶ **Interpreter**: ghci, hugs
 - ▶ **Compiler**: ghc, nhc98
- ▶ **Rein** funktional
 - ▶ **Essenz** der funktionalen Programmierung

10 [24]

Geschichtliches

- ▶ **Grundlagen** 1920/30
 - ▶ Kombinatorik und λ -Kalkül (Schönfinkel, Curry, Church)
- ▶ Erste funktionale **Programmiersprachen** 1960
 - ▶ LISP (McCarthy), ISWIM (Landin)
- ▶ **Weitere** Programmiersprachen 1970– 80
 - ▶ FP (Backus); ML (Milner, Gordon); Hope (Burstall); Miranda (Turner)
- ▶ **Konsolidierung** 1990
 - ▶ CAML, Formale Semantik für Standard ML
 - ▶ Haskell als Standardsprache
- ▶ **Kommerzialisierung** 2010
 - ▶ Scala, Clojure, F#

11 [24]

Programme als Funktionen

- ▶ Programme als Funktionen
$$P : \text{Eingabe} \rightarrow \text{Ausgabe}$$
- ▶ Keine veränderlichen **Variablen** — kein versteckter **Zustand**
- ▶ Rückgabewert hängt ausschließlich von Werten der Argumente ab, nicht vom Aufrufkontext (**referentielle Transparenz**)
- ▶ Alle **Abhängigkeiten** explizit

12 [24]

Beispiel: Programmieren mit Funktionen

- ▶ **Programme** werden durch **Gleichungen** definiert:

```
fac n = if n == 0 then 1
       else n * fac(n-1)
```

- ▶ Auswertung durch **Reduktion** von **Ausdrücken**:

```
fac 2 → if 2 == 0 then 1 else 2 * fac (2-1)
      → if False then 1 else 2 * fac 1
      → 2 * fac 1
      → 2 * if 1 == 0 then 1 else 1 * fac (1-1)
      → 2 * if False then 1 else 1 * fac 0
      → 2 * 1 * fac 0
      → 2 * 1 * if 0 == 0 then 1 else 0 * fac (0-1)
      → 2 * 1 * if True then 1 else 0 * fac (-1)
      → 2 * 1 * 1 → 2
```

13 [24]

Beispiel: Nichtnumerische Werte

- ▶ Rechnen mit **Zeichenketten**

```
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

- ▶ Auswertung:

```
repeat 2 "hallo "
→ if 2 == 0 then "" else "hallo " ++ repeat (2-1) "hallo "
→ "hallo " ++ repeat 1 "hallo "
→ "hallo " ++ if 1 == 0 then ""
               else "hallo " ++ repeat (1-1) "hallo "
→ "hallo " ++ ("hallo " ++ repeat 0 "hallo ")
→ "hallo " ++ ("hallo " ++ if 0 == 0 then ""
                          else repeat (0-1) "hallo ")
→ "hallo " ++ ("hallo " ++ "")
→ "hallo hallo "
```

14 [24]

Auswertung als Ausführungsbegriff

- ▶ **Programme** werden durch **Gleichungen** definiert:

$$f(x) = E$$

- ▶ **Auswertung** durch **Anwenden** der Gleichungen:

- ▶ Suchen nach **Vorkommen** von f , e.g. $f(t)$

▶ $f(t)$ wird durch $E \left[\begin{matrix} t \\ x \end{matrix} \right]$ ersetzt

- ▶ Auswertung kann **divergieren**!

15 [24]

Ausdrücke und Werte

- ▶ Nichtreduzierbare Ausdrücke sind **Werte**
- ▶ Vorgebenene **Basiswerte**: Zahlen, Zeichen
 - ▶ Durch **Implementation** gegeben
- ▶ Definierte **Datentypen**: Wahrheitswerte, Listen, ...
 - ▶ **Modellierung** von Daten

16 [24]

Typisierung

- ▶ Typen unterscheiden Arten von Ausdrücken und Werten:

```
repeat n s = ...   n Zahl
                  s Zeichenkette
```

- ▶ Verschiedene Typen:

- ▶ Basistypen (Zahlen, Zeichen)
- ▶ strukturierte Typen (Listen, Tupel, etc)

- ▶ Wozu Typen?

- ▶ Typüberprüfung während Übersetzung erspart Laufzeitfehler
- ▶ Programmsicherheit

17 [24]

Signaturen

- ▶ Jede Funktion hat eine **Signatur**

```
fac :: Integer → Integer
```

```
repeat :: Int → String → String
```

- ▶ **Typüberprüfung**

- ▶ fac nur auf Int anwendbar, Resultat ist Int
- ▶ repeat nur auf Int und String anwendbar, Resultat ist String

18 [24]

Übersicht: Typen in Haskell

Typ	Bezeichner	Beispiel
Ganze Zahlen	Int	0 94 -45
Fließkomma	Double	3.0 3.141592
Zeichen	Char	'a' 'x' '\034' '\n'
Zeichenketten	String	"yuck" "hi\nho"\n"
Wahrheitswerte	Bool	True False

Funktionen a → b

- ▶ Später mehr. Viel mehr.

19 [24]

Das Rechnen mit Zahlen

Beschränkte Genauigkeit, konstanter Aufwand ↔ beliebige Genauigkeit, wachsender Aufwand

Haskell bietet die Auswahl:

- ▶ Int - ganze Zahlen als Maschinenworte (≥ 31 Bit)
- ▶ Integer - beliebig große ganze Zahlen
- ▶ Rational - beliebig genaue rationale Zahlen
- ▶ Float, Double - Fließkommazahlen (reelle Zahlen)

20 [24]

Ganze Zahlen: Int und Integer

- ▶ Nützliche Funktionen (**überladen**, auch für Integer):

```
+, *, ^, - :: Int → Int → Int
abs :: Int → Int — Betrag
div, quot :: Int → Int → Int
mod, rem :: Int → Int → Int
```

Es gilt $(div\ x\ y)*y + mod\ x\ y == x$

- ▶ Vergleich durch $==, \neq, \leq, <, \dots$

- ▶ **Achtung:** Unäres Minus

- ▶ Unterschied zum Infix-Operator $-$
- ▶ Im Zweifelsfall klammern: $abs\ (-34)$

21 [24]

Fließkommazahlen: Double

- ▶ Doppelgenaue Fließkommazahlen (IEEE 754 und 854)

- ▶ Logarithmen, Wurzel, Exponentiation, π und e , trigonometrische Funktionen

- ▶ Konversion in ganze Zahlen:

- ▶ fromIntegral :: Int, Integer → Double
- ▶ fromInteger :: Integer → Double
- ▶ round, truncate :: Double → Int, Integer
- ▶ Überladungen mit Typannotation auflösen:

```
round (fromInt 10) :: Int
```

- ▶ **Rundungsfehler!**

22 [24]

Alphanumerische Basisdatentypen: Char

- ▶ Notation für einzelne Zeichen: 'a', ...

- ▶ Nützliche Funktionen:

```
ord :: Char → Int
chr :: Int → Char
```

```
toLower :: Char → Char
toUpper :: Char → Char
isDigit :: Char → Bool
isAlpha :: Char → Bool
```

- ▶ Zeichenketten: String

23 [24]

Zusammenfassung

- ▶ Programme sind Funktionen, definiert durch Gleichungen

- ▶ Referentielle Transparenz
- ▶ kein impliziter Zustand, keine veränderlichen Variablen

- ▶ Ausführung durch Reduktion von Ausdrücken

- ▶ Typisierung:

- ▶ Basistypen: Zahlen, Zeichen(ketten), Wahrheitswerte
- ▶ Strukturierte Typen: Listen, Tupel
- ▶ Jede Funktion f hat eine Signatur $f :: a \rightarrow b$

24 [24]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 2 vom 21.10.2014: Funktionen und Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 1843

1 [38]

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

2 [38]

Inhalt

- ▶ Organisatorisches
- ▶ Definition von Funktionen
 - ▶ Syntaktische Feinheiten
- ▶ Bedeutung von Haskell-Programmen
 - ▶ Striktheit
- ▶ Definition von Datentypen
 - ▶ Aufzählungen
 - ▶ Produkte

3 [38]

Organisatorisches

- ▶ Verteilung der Tutorien (laut stud.ip):

Mi	08 – 10	MZH 1110	Sören Schulze	11
Mi	10 – 12	MZH 1470	Sandor Herms	46
Mi	12 – 14	MZH 1110	Henrik Reichmann	19
Mi	14 – 16	SFG 1020	Felix Thielke	14
Do	08 – 10	MZH 1110	Jan Radtke	37
Do	10 – 12	MZH 1090	Daniel Müller	40
			Nicht zugeordnet	30

- ▶ Insgesamt: 197 Studenten, optimale Größe: ca. 33
- ▶ Bitte auf die kleineren Tutorien **umverteilen**, wenn möglich.

4 [38]

Definition von Funktionen

5 [38]

Definition von Funktionen

- ▶ Zwei wesentliche Konstrukte:

- ▶ Fallunterscheidung
- ▶ Rekursion

Satz

Fallunterscheidung und Rekursion auf natürlichen Zahlen sind Turing-mächtig.

- ▶ Funktion kann **partiell** sein.

6 [38]

Haskell-Syntax: Funktionsdefinition

Generelle Form:

- ▶ Signatur:

```
max :: Int -> Int -> Int
```

- ▶ Definition:

```
max x y = if x < y then y else x
```

- ▶ Kopf, mit Parametern
- ▶ Rumpf (evtl. länger, mehrere Zeilen)
- ▶ Typisches Muster: Fallunterscheidung, dann rekursiver Aufruf
- ▶ Was gehört zum Rumpf (Geltungsbereich)?

7 [38]

Haskell-Syntax: Charakteristika

- ▶ Leichtgewichtig
 - ▶ Wichtigstes Zeichen:
- ▶ Funktionsapplikation: $f\ a$
 - ▶ Keine Klammern
 - ▶ Höchste Priorität (engste Bindung)
- ▶ Abseitsregel: Gültigkeitsbereich durch Einrückung
 - ▶ Keine Klammern
- ▶ Auch in anderen Sprachen (Python, Ruby)

8 [38]

Haskell-Syntax I: Die Abseitsregel

Funktionsdefinition:

$$f\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n = E$$

- ▶ **Geltungsbereich** der Definition von f:
alles, was gegenüber f eingerückt ist.

- ▶ Beispiel:

```
f x = hier faengts an
    und hier gehts weiter
      immer weiter
g y z = und hier faengt was neues an
```

- ▶ Gilt auch verschachtelt.
- ▶ Kommentare sind *passiv*

9 [38]

Haskell-Syntax II: Kommentare

- ▶ Pro Zeile: Ab `--` bis Ende der Zeile

```
f x y = irgendwas  -- und hier der Kommentar!
```

- ▶ Über mehrere Zeilen: Anfang `{-`, Ende `-}`

```
{-
  Hier faengt der Kommentar an
  erstreckt sich ueber mehrere Zeilen
  bis hier                               -}
f x y = irgendwas
```

- ▶ Kann geschachtelt werden.

10 [38]

Haskell-Syntax III: Bedingte Definitionen

- ▶ Statt verschachtelter Fallunterscheidungen ...

```
f x y = if B1 then P else
        if B2 then Q else...
```

... **bedingte Gleichungen**:

```
f x y
| B1 =...
| B2 =...
```

- ▶ Auswertung der Bedingungen von oben nach unten
- ▶ Wenn keine Bedingung wahr ist: **Laufzeitfehler!** Deshalb:

```
| otherwise =...
```

11 [38]

Haskell-Syntax IV: Lokale Definitionen

- ▶ Lokale Definitionen mit **where** oder **let**:

```
f x y
| g = P y
| otherwise = Q where
  y = M
  f x = N x
f x y =
  let y = M
      f x = N x
  in if g then P y
     else Q
```

- ▶ f, y, ... werden **gleichzeitig** definiert (Rekursion!)
- ▶ Namen f, y und Parameter (x) **überlagern** andere
- ▶ Es gilt die **Abseitsregel**
 - ▶ Deshalb: Auf **gleiche Einrückung** der lokalen Definition achten!

12 [38]

Bedeutung von Funktionen

13 [38]

Bedeutung (Semantik) von Programmen

- ▶ **Operationale** Semantik:
 - ▶ Durch den **Ausführungsbegriff**
 - ▶ Ein Programm ist, was es tut.
- ▶ **Denotationelle** Semantik:
 - ▶ Programme werden auf **mathematische Objekte** abgebildet (Denotat).
 - ▶ Für funktionale Programme: **rekursiv** definierte Funktionen

Äquivalenz von operationaler und denotationaler Semantik

Sei P ein funktionales Programm, \rightarrow_P die dadurch definierte Reduktion, und $\llbracket P \rrbracket$ das Denotat. Dann gilt für alle Ausdrücke t und Werte v

$$t \rightarrow_P v \iff \llbracket P \rrbracket(t) = v$$

14 [38]

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int -> Int
inc x = x + 1
```

```
double :: Int -> Int
double x = 2*x
```

- ▶ Reduktion von inc (double (inc 3))

- ▶ Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (double (inc 3)) -> double (inc 3) + 1
                    -> 2*(inc 3) + 1
                    -> 2*(3 + 1) + 1
                    -> 2*4 + 1 -> 9
```

- ▶ Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (double (inc 3)) -> inc (double (3+1))
                    -> inc (2*(3+1))
                    -> (2*(3+1)) + 1
                    -> 2*4 + 1 -> 9
```

15 [38]

Konfluenz und Termination

Sei $\overset{*}{\rightarrow}$ die Reduktion in null oder mehr Schritten.

Definition (Konfluenz)

$\overset{*}{\rightarrow}$ ist **konfluent** gdw:

Für alle r, s, t mit $s \overset{*}{\leftarrow} r \overset{*}{\rightarrow} t$ gibt es u so dass $s \overset{*}{\rightarrow} u \overset{*}{\leftarrow} t$.

Definition (Termination)

\rightarrow ist **terminierend** gdw. es keine unendlichen Ketten gibt:

$$t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \dots t_n \rightarrow \dots$$

16 [38]

Auswertungsstrategien

- ▶ Wenn wir von Laufzeitfehlern abstrahieren, gilt:

Theorem (Konfluenz)

Funktionale Programme sind für jede Auswertungsstrategie **konfluent**.

Theorem (Normalform)

Terminierende funktionale Programme werten unter jeder Auswertungsstrategie jeden Ausdruck zum gleichen Wert aus (der **Normalform**).

- ▶ Auswertungsstrategie für **nicht-terminierende** Programme relevant
- ▶ Nicht-Termination **nötig** (Turing-Mächtigkeit)

17 [38]

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- ▶ Outermost-first entspricht **call-by-need**, **verzögerte** Auswertung.
- ▶ Innermost-first entspricht **call-by-value**, **strikte** Auswertung

- ▶ Beispiel:

```
repeat :: Int -> String -> String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- ▶ Auswertung von `repeat 0 undef`

18 [38]

Striktheit

Definition (Striktheit)

Funktion f ist **strikt** \iff Ergebnis ist undefiniert sobald ein Argument undefiniert ist.

- ▶ **Denotationelle** Eigenschaft (nicht operational)
- ▶ Java, C etc. sind **call-by-value** (nach Sprachdefinition) und damit **strikt**
- ▶ Haskell ist **nicht-strikt** (nach Sprachdefinition)
 - ▶ `repeat0 undef` **muss** "" ergeben.
 - ▶ Meisten Implementationen nutzen **verzögerte Auswertung**
- ▶ Fallunterscheidung ist **immer** nicht-strikt.

19 [38]

Datentypen

20 [38]

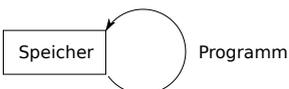
Datentypen als Modellierungskonstrukt

Programme **manipulieren** ein **Modell** (der Umwelt)

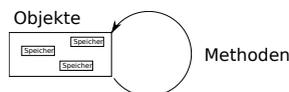
- ▶ Funktionale Sicht:



- ▶ Imperative Sicht:



- ▶ Objektorientierte Sicht:



21 [38]

Typkonstruktoren

- ▶ Aufzählungen
- ▶ Produkt
- ▶ Rekursion
- ▶ Funktionsraum

22 [38]

Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe



Ein Tante-Emma Laden wie in früheren Zeiten.

23 [38]

Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Äpfel	Boskoop	55	ct/Stk
	Cox Orange	60	ct/Stk
	Granny Smith	50	ct/Stk
Eier		20	ct/Stk
Käse	Gouda	14,50	€/kg
	Appenzeller	22,70	€/kg
Schinken		1,99	€/100 g
Salami		1,59	€/100 g
Milch		0,69	€/l
	Bio	1,19	€/l

24 [38]

Aufzählungen

- ▶ Aufzählungen: Menge von **disjunkten** Konstanten

$\text{Apfel} = \{\text{Boskoop}, \text{Cox}, \text{Smith}\}$

$\text{Boskoop} \neq \text{Cox}, \text{Cox} \neq \text{Smith}, \text{Boskoop} \neq \text{Smith}$

- ▶ Genau drei unterschiedliche Konstanten
- ▶ Funktion mit Wertebereich *Apfel* muss drei Fälle unterscheiden
- ▶ Beispiel: $\text{preis} : \text{Apfel} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\text{preis}(a) = \begin{cases} 55 & a = \text{Boskoop} \\ 60 & a = \text{Cox} \\ 50 & a = \text{Smith} \end{cases}$$

25 [38]

Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- ▶ **Definition**

```
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

- ▶ Implizite Deklaration der **Konstruktoren** $\text{Boskoop} :: \text{Apfel}$ als Konstanten
- ▶ Großschreibung der Konstruktoren

- ▶ **Fallunterscheidung:**

```
apreis :: Apfel -> Int
apreis a = case a of
  Boskoop -> 55
  CoxOrange -> 60
  GrannySmith -> 50
```

```
data Farbe = Rot | Grn
farbe d =
  case d of
    GrannySmith -> Grn
    _ -> Rot
```

26 [38]

Fallunterscheidung in der Funktionsdefinition

- ▶ Abkürzende Schreibweisen (**syntaktischer Zucker**):

$$\begin{array}{l} f\ c_1 == e_1 \\ \dots \\ f\ c_n == e_n \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} f\ x == \text{case } x \text{ of } c_1 \rightarrow e_1, \\ \dots \\ c_n \rightarrow e_n \end{array}$$

- ▶ Damit:

```
apreis :: Apfel -> Int
apreis Boskoop = 55
apreis CoxOrange = 60
apreis GrannySmith = 50
```

27 [38]

Der einfachste Aufzählungstyp

- ▶ **Einfachste** Aufzählung: Wahrheitswerte

$\text{Bool} = \{\text{True}, \text{False}\}$

- ▶ Genau zwei unterschiedliche Werte

- ▶ **Definition** von Funktionen:

- ▶ Wertetabellen sind explizite Fallunterscheidungen

\wedge	<i>true</i>	<i>false</i>	$\text{true} \wedge \text{true} = \text{true}$
	<i>true</i>	<i>false</i>	$\text{true} \wedge \text{false} = \text{false}$
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	$\text{false} \wedge \text{true} = \text{false}$
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	$\text{false} \wedge \text{false} = \text{false}$

28 [38]

Wahrheitswerte: Bool

- ▶ **Vordefiniert** als

```
data Bool = True | False
```

- ▶ Vordefinierte **Funktionen**:

```
not :: Bool -> Bool      -- Negation
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool -- Konjunktion
(||) :: Bool -> Bool -> Bool -- Disjunktion
```

- ▶ **Konjunktion** definiert als

```
a && b = case a of False -> False
                True  -> b
```

- ▶ $\&\&$, $\|\|$ sind rechts nicht strikt
- ▶ $1 == 0 \ \&\& \ \text{div } 1 \ 0 == 0 \rightsquigarrow \text{False}$
- ▶ **if _ then _ else _** als syntaktischer Zucker:

$\text{if } b \text{ then } p \text{ else } q \rightarrow \text{case } b \text{ of } \text{True} \rightarrow p$
 $\text{False} \rightarrow q$

29 [38]

Beispiel: Ausschließende Disjunktion

- ▶ Mathematische Definition:

```
exOr :: Bool -> Bool -> Bool
exOr x y = (x || y) && (not (x && y))
```

- ▶ **Alternative 1:** explizite Wertetabelle:

```
exOr False False = False
exOr True  False = True
exOr False True  = True
exOr True  True  = False
```

- ▶ **Alternative 2:** Fallunterscheidung auf erstem Argument

```
exOr True  y = not y
exOr False y = y
```

- ▶ Was ist am **besten**?

- ▶ Effizienz, Lesbarkeit, Striktheit

30 [38]

Produkte

- ▶ Konstruktoren können **Argumente** haben
- ▶ Beispiel: Ein **Datum** besteht aus **Tag**, **Monat**, **Jahr**
- ▶ Mathematisch: Produkt (Tupel)

$\text{Date} = \{\text{Date } (n, m, y) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \text{Month}, y \in \mathbb{N}\}$
 $\text{Month} = \{\text{Jan}, \text{Feb}, \text{Mar}, \dots\}$

- ▶ **Funktionsdefinition:**

- ▶ Konstruktorargumente sind gebundene Variablen

$\text{year}(D(n, m, y)) = y$
 $\text{day}(D(n, m, y)) = n$

- ▶ Bei der **Auswertung** wird gebundene Variable durch konkretes Argument ersetzt

31 [38]

Produkte in Haskell

- ▶ Konstruktoren mit Argumenten

```
data Date = Date Int Month Int
data Month = Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun
            | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec
```

- ▶ **Beispielwerte:**

```
today = Date 21 Oct 2014
bloomsday = Date 16 Jun 1904
```

- ▶ Über **Fallunterscheidung** Zugriff auf **Argumente** der Konstruktoren:

```
day :: Date -> Int
year :: Date -> Int
day d = case d of Date t m y -> t
year (Date d m y) = y
```

32 [38]

Beispiel: Tag im Jahr

- ▶ Tag im Jahr: Tag im laufenden Monat plus Summe der Anzahl der Tage der vorherigen Monate

```
yearDay :: Date → Int
yearDay (Date d m y) = d + sumPrevMonths m where
  sumPrevMonths :: Month → Int
  sumPrevMonths Jan = 0
  sumPrevMonths m = daysInMonth (prev m) y +
    sumPrevMonths (prev m)
```

- ▶ Tage im Monat benötigt Jahr als Argument (Schaltjahr!)

```
daysInMonth :: Month → Int → Int
prev :: Month → Month
```

- ▶ Schaltjahr: Gregorianischer Kalender

```
leapyear :: Int → Bool
leapyear y = if mod y 100 == 0 then mod y 400 == 0
             else mod y 4 == 0
```

33 [38]

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- ▶ Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaese = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaese → Double
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

- ▶ Alle Artikel:

```
data Artikel =
  Apfel Apfel | Eier
  | Kaese Kaese | Schinken
  | Salami | Milch Bool
```

34 [38]

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- ▶ Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int
           | Kilo Double | Liter Double
```

- ▶ Der Preis und seine Berechnung:

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```

```
preis :: Artikel → Menge → Preis
preis (Apfel a) (Stueck n) = Cent (n * apreis a)
preis Eier (Stueck n) = Cent (n * 20)
preis (Kaese k) (Kilo kg) = Cent (round (kg *
                                     kpreis k))
preis Schinken (Gramm g) = Cent (g / 100 * 199)
preis Salami (Gramm g) = Cent (g / 100 * 159)
preis (Milch bio) (Liter l) =
  Cent (round (l * if not bio then 69 else 119))
preis _ _ = Ungueltig
```

35 [38]

Auswertung der Fallunterscheidung

- ▶ Argument der Fallunterscheidung wird **nur soweit nötig** ausgewertet

- ▶ Beispiel:

```
data Foo = Foo Int | Bar
```

```
f :: Foo → Int
f foo = case foo of Foo i → i; Bar → 0
```

```
g :: Foo → Int
g foo = case foo of Foo i → 9; Bar → 0
```

- ▶ Auswertungen:

```
f Bar → 0
f (Foo undefined) → *** Exception: undefined
g Bar → 0
g (Foo undefined) → 9
```

36 [38]

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

Definition eines **algebraischen Datentypen** T:

```
data T = C1 t1,1 ... t1,k1
      | ...
      | Cn tn,1 ... tn,kn
```

- ▶ Konstruktoren C_1, \dots, C_n sind **disjunkt**:

$$C_i x_1 \dots x_n = C_j y_1 \dots y_m \implies i = j$$

- ▶ Konstruktoren sind **injektiv**:

$$C x_1 \dots x_n = C y_1 \dots y_n \implies x_i = y_i$$

- ▶ Konstruktoren **erzeugen** den Datentyp:

$$\forall x \in T. x = C_i y_1 \dots y_m$$

Diese Eigenschaften machen **Fallunterscheidung** möglich.

Rekursion? \rightsquigarrow **Nächste Vorlesung!**

37 [38]

Zusammenfassung

- ▶ **Striktheit**

- ▶ Haskell ist **spezifiziert** als nicht-strikt

- ▶ Datentypen und Funktionsdefinition **dual**

- ▶ **Aufzählungen** — Fallunterscheidung

- ▶ **Produkte** — Projektion

- ▶ **Algebraische Datentypen**

- ▶ **Drei wesentliche Eigenschaften** der Konstruktoren

- ▶ **Nächste Vorlesung**: Rekursive Datentypen

38 [38]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 3 vom 28.10.2014: Rekursive Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2746

1 [32]

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

2 [32]

Inhalt

- ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Rekursive Definition
 - ▶ ... und wozu sie nützlich sind
 - ▶ Rekursive Datentypen in anderen Sprachen
 - ▶ Fallbeispiel: Labyrinth

3 [32]

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

Definition eines algebraischen Datentypen T:

$$\text{data } T = \begin{array}{l} C_1 t_{1,1} \dots t_{1,k_1} \\ \dots \\ C_n t_{n,1} \dots t_{n,k_n} \end{array}$$

- ▶ Konstruktoren C_1, \dots, C_n sind disjunkt:
 $C_i x_1 \dots x_n = C_j y_1 \dots y_m \implies i = j$
- ▶ Konstruktoren sind injektiv:
 $C x_1 \dots x_n = C y_1 \dots y_n \implies x_i = y_i$
- ▶ Konstruktoren erzeugen den Datentyp:
 $\forall x \in T. x = C_i y_1 \dots y_m$

Diese Eigenschaften machen Fallunterscheidung möglich.

Heute: Rekursion

4 [32]

Rekursive Datentypen

- ▶ Der definierte Typ T kann rechts benutzt werden.
- ▶ Rekursive Datentypen sind unendlich.
- ▶ Entspricht induktiver Definition
- ▶ Modelliert Aggregation (Sammlung von Objekten)
- ▶ Funktionen werden durch Rekursion definiert.

5 [32]

Algebraische Datentypen: Nomenklatur

Gegeben Definition $\text{data } T = \begin{array}{l} C_1 t_{1,1} \dots t_{1,k_1} \\ \dots \\ C_n t_{n,1} \dots t_{n,k_n} \end{array}$

- ▶ C_i sind Konstruktoren
 - ▶ Immer vordefiniert
- ▶ Selektoren sind Funktionen $\text{sel}_{i,j}$:
 $\text{sel}_{i,j} (C_i t_{i,1} \dots t_{i,k_i}) = t_{i,j}$
 - ▶ Partiiell, linksinvers zu Konstruktor
 - ▶ Können vordefiniert werden (erweiterte Syntax der data Deklaration)
- ▶ Diskriminatoren sind Funktionen dis_i :
 $\text{dis}_i :: T \rightarrow \text{Bool}$
 $\text{dis}_i (C_i \dots) = \text{True}$
 $\text{dis}_i _ = \text{False}$
 - ▶ Definitionsbereich des Selektors sel_i
 - ▶ Nie vordefiniert

6 [32]

Uncle Bob's Auld Time Grocery Shoppe Revisited

- ▶ Das Lager für Bob's Shoppe:
 - ▶ ist entweder leer,
 - ▶ oder es enthält einen Artikel und Menge, und weiteres.

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

7 [32]

Suchen im Lager

- ▶ Rekursive Suche (erste Version):

```
suche :: Artikel -> Lager -> Menge
suche art LeeresLager = ???
```

- ▶ Modellierung des Resultats:

```
data Resultat = Gefunden Menge | NichtGefunden
```

- ▶ Damit rekursive Suche:

```
suche :: Artikel -> Lager -> Resultat
suche art (Lager lart m l)
  | art == lart = Gefunden m
  | otherwise = suche art l
suche art LeeresLager = NichtGefunden
```

8 [32]

Einlagern

- ▶ Mengen sollen aggregiert werden, d.h. 35l Milch und 20l Milch werden zu 55l Milch.

- ▶ Dazu Hilfsfunktion:

```
addiere (Stueck i) (Stueck j) = Stueck (i + j)
addiere (Gramm g) (Gramm h) = Gramm (g + h)
addiere (Liter l) (Liter m) = Liter (l + m)
addiere m n = error ("addiere:␣" ++ show m ++ "␣und␣" ++ show n)
```

- ▶ Damit einlagern:

```
einlagern :: Artikel -> Menge -> Lager -> Lager
einlagern a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
einlagern a m (Lager al ml l)
  | a == al = Lager a (addiere m ml) l
  | otherwise = Lager al ml (einlagern a m l)
```

- ▶ Problem: **Falsche Mengenangaben**

- ▶ z.B. einlagern Eier (Liter 3.0) l

9 [32]

Einlagern (verbessert)

- ▶ Eigentliche Funktion einlagern wird als **lokale Funktion** versteckt, und nur mit gültiger Mengenangabe aufgerufen:

```
einlagern :: Artikel -> Menge -> Lager -> Lager
einlagern a m l =
  let einlagern' a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
      einlagern' a m (Lager al ml l)
        | a == al = Lager a (addiere m ml) l
        | otherwise = Lager al ml (einlagern' a m l)
  in case preis a m of
    Ungueltig -> l
    _ -> einlagern' a m l
```

10 [32]

Einkaufen und bezahlen

- ▶ Wir brauchen einen **Einkaufswagen**:

```
data Einkaufswagen = LeererWagen
  | Einkauf Artikel Menge Einkaufswagen
```

- ▶ Artikel einkaufen:

```
einkauf :: Artikel -> Menge -> Einkaufswagen -> Einkaufswagen
einkauf a m e =
  case preis a m of
    Ungueltig -> e
    _ -> Einkauf a m e
```

- ▶ Gesamtsumme berechnen:

```
kasse :: Einkaufswagen -> Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

11 [32]

Beispiel: Kassenbon

```
kassenbon :: Einkaufswagen -> String
```

Ausgabe:

Bob's Aulde Grocery Shoppe

Unveränderlicher Kopf

Artikel	Menge	Preis
Schinken	50 g.	0.99 EU
Milch Bio	1.0 l.	1.19 EU
Schinken	50 g.	0.99 EU
Apfel Boskoop	3 St	1.65 EU

Summe:		4.82 EU

Ausgabe von Artikel und Menge (rekursiv)

Ausgabe von kasse

12 [32]

Kassenbon: Implementation

- ▶ Kernfunktion:

```
artikel :: Einkaufswagen -> String
artikel LeererWagen = ""
artikel (Einkauf a m e) =
  formatL 20 (show a) ++
  formatR 7 (menge m) ++
  formatR 10 (showEuro (cent a m)) ++ "\n" ++
  artikel e
```

- ▶ Hilfsfunktionen:

```
formatL :: Int -> String -> String
```

13 [32]

Rekursive Typen in Java

- ▶ Nachbildung durch Klassen, z.B. für Listen:

```
class List {
  public List(Object el, List tl) {
    this.elem = el;
    this.next = tl;
  }
  public Object elem;
  public List next;
}
```

- ▶ Länge (iterativ):

```
int length() {
  int i = 0;
  for (List cur = this; cur != null; cur = cur.next)
    i++;
  return i;
}
```

14 [32]

Rekursive Typen in C

- ▶ C: Produkte, Aufzählungen, keine rekursiven Typen
- ▶ Rekursion durch Zeiger

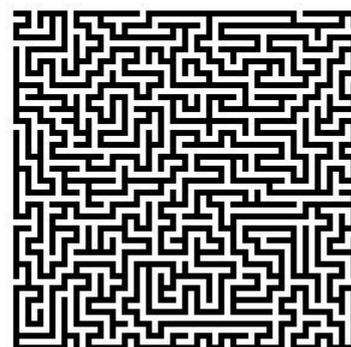
```
typedef struct list_t {
  void *elem;
  struct list_t *next;
} *list;
```

- ▶ Konstruktoren **nutzerimplementiert**

```
list cons(void *hd, list tl)
{ list l;
  if ((l = (list) malloc(sizeof(struct list_t))) == NULL) {
    printf("Out_of_memory\n"); exit(-1);
  }
  l -> elem = hd; l -> next = tl;
  return l;
}
```

15 [32]

Fallbeispiel: Zyklische Datenstrukturen



Quelle: docs.gimp.org

16 [32]

Modellierung eines Labyrinths

- Ein **gerichtetes** Labyrinth ist entweder
 - eine Sackgasse,
 - ein Weg, oder
 - eine Abzweigung in zwei Richtungen.

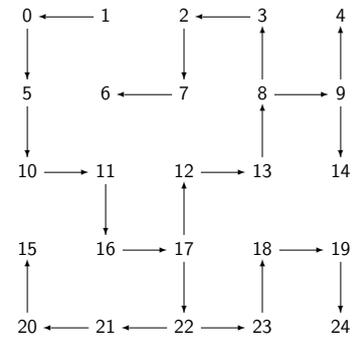
```
data Lab = Dead Id
         | Pass Id Lab
         | TJnc Id Lab Lab
```

- Ferner benötigt: eindeutige **Bezeichner** der Knoten

```
type Id = Integer
```

17 [32]

Ein Labyrinth (zyklenfrei)



18 [32]

Traversion des Labyrinths

- Ziel: **Pfad** zu einem gegebenen **Ziel** finden

- Benötigt Pfade und Traversion

```
data Path = Cons Id Path
          | Mt
```

```
data Trav = Succ Path
          | Fail
```

19 [32]

Traversionsstrategie

- Geht von **zyklenfreien** Labyrinth aus
- An jedem Knoten prüfen, ob Ziel erreicht, ansonsten
 - an Sackgasse Fail
 - an Passagen weiterlaufen
 - an Kreuzungen Auswahl treffen

- Erfordert Propagation von Fail:

```
cons :: Id -> Trav -> Trav
```

```
select :: Trav -> Trav -> Trav
```

20 [32]

Zyklusfreie Traversion

```
traverse1 :: Id -> Lab -> Trav
traverse1 t l
  | nid l == t = Succ (Cons (nid l) Mt)
  | otherwise = case l of
    Dead _ -> Fail
    Pass i n -> cons i (traverse1 t n)
    TJnc i n m -> select (cons i (traverse1 t n))
                       (cons i (traverse1 t m))
```

21 [32]

Traversion mit Zyklen

- Veränderte **Strategie**: Pfad bis hierher übergeben
 - Pfad muss **hinten** erweitert werden.
- Wenn aktueller Knoten in bisherigen Pfad **enthalten** ist, Fail
- Ansonsten wie oben
- Neue Hilfsfunktionen:

```
contains :: Id -> Path -> Bool
```

```
cat :: Path -> Path -> Path
```

```
snoc :: Path -> Id -> Path
```

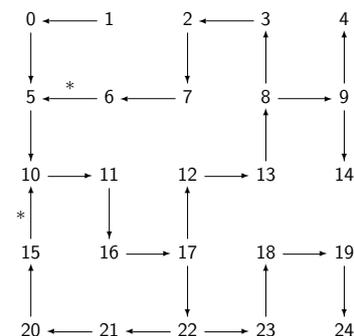
22 [32]

Traversion mit Zyklen

```
traverse2 :: Id -> Lab -> Path -> Trav
traverse2 t l p
  | nid l == t = Succ (snoc p (nid l))
  | contains (nid l) p = Fail
  | otherwise = case l of
    Dead _ -> Fail
    Pass i n -> traverse2 t n (snoc p i)
    TJnc i n m -> select (traverse2 t n (snoc p i))
                       (traverse2 t m (snoc p i))
```

23 [32]

Ein Labyrinth (mit Zyklen)



24 [32]

Ungerichtete Labyrinth

- ▶ In einem **ungerichteten** Labyrinth haben Passagen keine Richtung.
 - ▶ Sackgassen haben einen Nachbarn,
 - ▶ eine Passage hat zwei Nachbarn,
 - ▶ und eine Abzweigung drei Nachbarn.

```
data Lab = Dead Id Lab
         | Pass Id Lab Lab
         | TJnc Id Lab Lab Lab
```

- ▶ Andere Datentypen und Hilfsfunktionen bleiben (*mutatis mutandis*)
- ▶ Jedes nicht-leere ungerichtete Labyrinth hat **Zyklen**.
- ▶ **Invariante** (nicht durch Typ garantiert)

25 [32]

Traversion in ungerichteten Labyrinth

- ▶ Traversionsfunktion wie vorher

```
traverse3 :: Id → Lab → Path → Trav
traverse3 t l p
| nid l == t = Succ (snoc p (nid l))
| contains (nid l) p = Fail
| otherwise = case l of
  Dead i n → traverse3 t n (snoc p i)
  Pass i n m → select (traverse3 t n (snoc p i))
                    (traverse3 t m (snoc p i))
  TJnc i n m k → select (traverse3 t n (snoc p i))
                      (select (traverse3 t m (snoc p i))
                              (traverse3 t k (snoc p i)))
```

26 [32]

Zusammenfassung Labyrinth

- ▶ Labyrinth → **Graph** oder **Baum**
- ▶ In Haskell: gleicher Datentyp
- ▶ Referenzen nicht **explizit** in Haskell
 - ▶ Keine undefinierten Referenzen (erhöhte Programmsicherheit)
 - ▶ Keine Gleichheit auf Referenzen
 - ▶ Gleichheit ist **immer** strukturell (oder selbstdefiniert)

27 [32]

Beispiel: Zeichenketten selbstgemacht

- ▶ Eine **Zeichenkette** ist
 - ▶ entweder leer (das leere Wort ϵ)
 - ▶ oder ein **Zeichen** c und eine weitere Zeichenkette xs

```
data MyString = Empty
              | Cons Char MyString
```

- ▶ **Lineare** Rekursion
 - ▶ Genau ein rekursiver Aufruf

28 [32]

Rekursive Definition

- ▶ Typisches Muster: **Fallunterscheidung**
 - ▶ Ein **Fall** pro Konstruktor
- ▶ Hier:
 - ▶ Leere Zeichenkette
 - ▶ Nichtleere Zeichenkette

29 [32]

Funktionen auf Zeichenketten

- ▶ Länge:

```
len :: MyString → Int
len Empty      = 0
len (Cons c str) = 1 + len str
```

- ▶ Verkettung:

```
cat :: MyString → MyString → MyString
cat Empty t      = t
cat (Cons c s) t = Cons c (cat s t)
```

- ▶ Umkehrung:

```
rev :: MyString → MyString
rev Empty      = Empty
rev (Cons c t) = cat (rev t) (Cons c Empty)
```

30 [32]

Was haben wir gesehen?

- ▶ Strukturell **ähnliche** Typen:
 - ▶ Einkaufswagen, Path, MyString (Listen-ähnlich)
 - ▶ Resultat, Preis, Trav (Punktierte Typen)
- ▶ Ähnliche **Funktionen** darauf
- ▶ Besser: **eine** Typdefinition mit Funktionen, Instantiierung zu verschiedenen Typen

~Nächste Vorlesung

31 [32]

Zusammenfassung

- ▶ Datentypen können **rekursiv** sein
- ▶ Rekursive Datentypen sind **unendlich** (induktiv)
- ▶ Funktionen werden **rekursiv** definiert
- ▶ Fallbeispiele: Einkaufen in Bob's Shoppe, Labyrinthtraversion
- ▶ Viele strukturell ähnliche Typen
- ▶ **Nächste** Woche: Abstraktion über Typen (Polymorphie)

32 [32]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 4 vom 04.11.2014: Typvariablen und Polymorphie

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2749

1 | 1

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

2 | 1

Inhalt

- ▶ Letzte Vorlesung: rekursive Datentypen
- ▶ Diese Vorlesung:
 - ▶ Abstraktion über Typen: Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Arten der Polymorphie:
 - ▶ Parametrische Polymorphie
 - ▶ Ad-hoc Polymorphie

3 | 1

Ähnliche Datentypen der letzten Vorlesung

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

```
data Einkaufswagen = LeererWagen
                   | Einkauf Artikel Menge Einkaufswagen
```

```
data Path = Cons Id Path
          | Mt
```

```
data MyString = Empty
              | Cons Char MyString
```

- ▶ ein konstanter Konstruktor
- ▶ ein linear rekursiver Konstruktor

4 | 1

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

- ▶ Pfade:

```
cat :: Path -> Path -> Path
cat Mt q      = q
cat (Cons i p) q = Cons i (cat p q)
```

```
rev :: Path -> Path
rev Mt      = Mt
rev (Cons i p) = cat (rev p) (Cons i Mt)
```

- ▶ Zeichenketten:

```
cat :: MyString -> MyString -> MyString
cat Empty t      = t
cat (Cons c s) t = Cons c (cat s t)
```

```
rev :: MyString -> MyString
rev Empty      = Empty
rev (Cons c t) = cat (rev t) (Cons c Empty)
```

5 | 1

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

```
kasse :: Einkaufswagen -> Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

```
inventur :: Lager -> Int
inventur LeeresLager = 0
inventur (Lager a m l) = cent a m + inventur l
```

```
len :: MyString -> Int
len Empty      = 0
len (Cons c str) = 1 + len str
```

- ▶ ein Fall pro Konstruktor
- ▶ linearer rekursiver Aufruf

6 | 1

Die Lösung: Polymorphie

Definition (Polymorphie)

Polymorphie ist Abstraktion über Typen

Arten der Polymorphie

- ▶ Parametrische Polymorphie (Typvariablen):
Generisch über alle Typen
- ▶ Ad-Hoc Polymorphie (Überladung):
Nur für bestimmte Typen

Anders als in Java (mehr dazu später).

7 | 1

Parametrische Polymorphie: Typvariablen

- ▶ Typvariablen abstrahieren über Typen

```
data List α = Empty
           | Cons α (List α)
```

- ▶ α ist eine Typvariable
- ▶ α kann mit Id oder Char instantiiert werden
- ▶ List α ist ein polymorpher Datentyp
- ▶ Typvariable α wird bei Anwendung instantiiert
- ▶ Signatur der Konstruktoren

```
Empty :: List α
Cons  :: α -> List α -> List α
```

8 | 1

Polymorphe Ausdrücke

- **Typkorrekte** Terme:

Empty	List α
Cons 57 Empty	List Int
Cons 7 (Cons 8 Empty)	List Int
Cons 'p' (Cons 'i' (Cons '3' Empty))	List Char
Cons True Empty	List Bool
- Nicht **typ-korrekt**:
 - Cons 'a' (Cons 0 Empty)
 - Cons True (Cons 'x' Empty)
 wegen **Signatur** des Konstruktors:


```
Cons ::  $\alpha \rightarrow$  List  $\alpha \rightarrow$  List  $\alpha$ 
```

9 [1]

Polymorphe Funktionen

- Parametrische Polymorphie für **Funktionen**:


```
cat :: List  $\alpha \rightarrow$  List  $\alpha \rightarrow$  List  $\alpha$ 
cat Empty ys = ys
cat (Cons x xs) ys = Cons x (cat xs ys)
```
- Typvariable α wird bei Anwendung instantiiert:


```
cat (Cons 3 Empty) (Cons 5 (Cons 57 Empty))
cat (Cons 'p' (Cons 'i' Empty)) (Cons '3' Empty)
```

 aber **nicht**

```
cat (Cons True Empty) (Cons 'a' (Cons 0 Empty))
```
- Typvariable: vergleichbar mit Funktionsparameter
- Restriktion: Typvariable auf Resultatposition?

10 [1]

Beispiel: Der Shop (refaktoriert)

- Einkaufswagen und Lager als Listen?
- Problem: zwei Typen als Argument
- Lösung 1: zu einem Typ zusammenfassen


```
data Posten = Posten Artikel Menge
```
- Damit:


```
type Lager = [Posten]
type Einkaufswagen = [Posten]
```
- **Gleicher** Typ!
 - Bug or Feature? Bug!
- Lösung: Datentyp **verkapseln**

```
data Lager = Lager [Posten]
data Einkaufswagen = Einkaufswagen [Posten]
```

11 [1]

Lösung 2: Tupel

- Mehr als **eine** Typvariable möglich
- Beispiel: **Tupel** (kartesisches Produkt, Paare)


```
data Pair  $\alpha \beta$  = Pair  $\alpha \beta$ 
```
- Signatur des Konstruktors:


```
Pair ::  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow$  Pair  $\alpha \beta$ 
```
- Beispielterm

Pair 4 'x'	Pair Int Char
Pair (Cons True Empty) 'a'	Pair (List Bool) Char
Pair (3+4) (Cons 'a' Empty)	Pair Int (List Char)
Cons (Pair 7 'x') Empty	List (Pair Int Char)

12 [1]

Vordefinierte Datentypen: Tupel und Listen

- Eingebauter **syntaktischer Zucker**
- **Tupel** sind das kartesische Produkt


```
data ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) = ( $\alpha$ ,  $\beta$ )
```

 - (a, b) = alle Kombinationen von Werten aus a und b
 - Auch n-Tupel: (a,b,c) etc.
- **Listen**

```
data [ $\alpha$ ] = [] |  $\alpha$  : [ $\alpha$ ]
```

 - Weitere Abkürzungen: [x]=x:[], [x,y] =x:y:[] etc.

13 [1]

Vordefinierte Datentypen: Optionen

- ```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
data Resultat = Gefunden Menge | NichtGefunden
data Trav = Succ Path | Fail
```
- Instanzen eines **vordefinierten** Typen:
- ```
data Maybe  $\alpha$  = Just  $\alpha$  | Nothing
```
- Vordefinierten Funktionen (**import** Data.Maybe):
- ```
fromJust :: Maybe $\alpha \rightarrow \alpha$
fromMaybe :: $\alpha \rightarrow$ Maybe $\alpha \rightarrow \alpha$
maybeToList :: Maybe $\alpha \rightarrow$ [α]
listToMaybe :: [α] \rightarrow Maybe α — "sicheres" head
```

14 [1]

## Übersicht: vordefinierte Funktionen auf Listen I

- ```
(#) :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Verkettung
(!!) :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  Int  $\rightarrow \alpha$  —  $n$ -tes Element selektieren
concat :: [[ $\alpha$ ]]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ] — "flachklopfen"
length :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  Int — Länge
head, last :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow \alpha$  — Erstes/letztes Element
tail, init :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Hinterer/vorderer Rest
replicate :: Int  $\rightarrow \alpha \rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Erzeuge  $n$  Kopien
repeat ::  $\alpha \rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Erzeugt zyklische Liste
take :: Int  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Erste  $n$  Elemente
drop :: Int  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Rest nach  $n$  Elementen
splitAt :: Int  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  ([ $\alpha$ ], [ $\alpha$ ]) — Spaltet an Index  $n$ 
reverse :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\alpha$ ] — Dreht Liste um
zip :: [ $\alpha$ ]  $\rightarrow$  [ $\beta$ ]  $\rightarrow$  [( $\alpha$ ,  $\beta$ )] — Erzeugt Liste v. Paaren
unzip :: [( $\alpha$ ,  $\beta$ )]  $\rightarrow$  ([ $\alpha$ ], [ $\beta$ ]) — Spaltet Liste v. Paaren
and, or :: [Bool]  $\rightarrow$  Bool — Konjunktion/Disjunktion
sum :: [Int]  $\rightarrow$  Int — Summe (überladen)
```

15 [1]

Vordefinierte Datentypen: Zeichenketten

- String sind Listen von Zeichen:


```
type String = [Char]
```
- Alle vordefinierten Funktionen auf Listen verfügbar.
- Syntaktischer Zucker zur Eingabe:


```
"yoho" = ['y','o','h','o'] == 'y':'o':'h':'o':[]
```
- Beispiel:


```
cnt :: Char  $\rightarrow$  String  $\rightarrow$  Int
cnt c [] = 0
cnt c (x:xs) = if (c==x) then 1+ cnt c xs
                else cnt c xs
```

16 [1]

Zurück im Labyrinth

- ▶ Labyrinth als Instanz eines allgemeineren Datentyps?
- ▶ Erste Refaktorisierung:

```
type Id = Integer
type Path = [Id]
data Lab = Node Id [Lab]
```
- ▶ Instanz eines **variadischen** Baumes

17 [1]

Labyrinth verallgemeinert: Variadische Bäume

- ▶ Variable Anzahl Kinderknoten: Liste von Kinderknoten

```
data VTree α = VNode α [VTree α]
```
- ▶ Anzahl Knoten zählen:

```
count :: VTree α → Int
count (VNode _ ns) = 1+ count_nodes ns

count_nodes :: [VTree α] → Int
count_nodes [] = 0
count_nodes (t:ts) = count t+ count_nodes ts
```
- ▶ Damit: das Labyrinth als variadischer Baum

```
type Lab = VTree Id
```

18 [1]

Ad-Hoc Polymorphie und Overloading

Definition (Überladung)

Funktion $f :: a \rightarrow b$ existiert für **mehr als einen**, aber **nicht für alle** Typen

- ▶ Beispiel:
 - ▶ Gleichheit: $(==) :: \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \text{Bool}$
 - ▶ Vergleich: $(<) :: \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \text{Bool}$
 - ▶ Anzeige: $\text{show} :: \alpha \rightarrow \text{String}$
- ▶ Lösung: **Typklassen**
- ▶ Typklassen bestehen aus:
 - ▶ **Deklaration** der Typklasse
 - ▶ **Instantiierung** für bestimmte Typen

19 [1]

Typklassen: Syntax

- ▶ **Deklaration:**

```
class Show α where
  show :: α → String
```
- ▶ **Instantiierung:**

```
instance Show Bool where
  show True = "Wahr"
  show False = "Falsch"
```
- ▶ Prominente vordefinierte Typklassen
 - ▶ Eq für $(==)$
 - ▶ Ord für $(<)$ (und andere Vergleiche)
 - ▶ Show für show
 - ▶ Num (uvm) für numerische Operationen (Literele überladen)

20 [1]

Typklassen in polymorphen Funktionen

- ▶ Element einer Liste (vordefiniert):

```
elem :: Eq α ⇒ α → [α] → Bool
elem e [] = False
elem e (x:xs) = e == x || elem e xs
```

- ▶ Sortierung einer List: qsort

```
qsort :: Ord α ⇒ [α] → [α]
```

- ▶ Liste ordnen und anzeigen:

```
showsorted :: (Eq α, Show α) ⇒ [α] → String
showsorted x = show (qsort x)
```

21 [1]

Hierarchien von Typklassen

- ▶ Typklassen können andere **voraussetzen**:

```
class Eq α ⇒ Ord α where
  (<) :: α → α → Bool
  (≤) :: α → α → Bool
  a ≤ b = a == b || a < b
```

- ▶ Default-Definition von \leq
- ▶ Kann bei Instantiierung überschrieben werden

22 [1]

Polymorphie: the missing link

	Parametrisch	Ad-Hoc
Funktionen	$f :: \alpha \rightarrow \text{Int}$	class F α where $f :: a \rightarrow \text{Int}$
Typen	data Maybe α = Just α Nothing	Konstruktorklassen

- ▶ Kann **Entscheidbarkeit** der Typherleitung gefährden
- ▶ Erstmal nicht relevant

23 [1]

Polymorphie in anderen Programmiersprachen: Java

- ▶ Polymorphie in **Java**: Methode auf alle Subklassen anwendbar
 - ▶ Manuelle Typkonversion nötig, fehleranfällig
- ▶ Neu ab Java 1.5: **Generics**
 - ▶ Damit **parametrische Polymorphie** möglich

```
class AbsList<T> {
  public AbsList(T el, AbsList<T> tl) {
    this.elem = el;
    this.next = tl;
  }
  public T elem;
  public AbsList<T> next;
}
```

24 [1]

Polymorphie in anderen Programmiersprachen: Java

Typkorrekte Konkatenation:

```
void concat(AbsList<T> o)
{
  AbsList<T> cur= this;
  while (cur.next != null) cur= cur.next;
  cur.next= o;
}
```

Nachteil: Benutzung umständlich, weil keine Typherleitung

```
AbsList<Integer> l=
new AbsList<Integer>(new Integer(1),
new AbsList<Integer>(new Integer(2), null));
```

25 [1]

Polymorphie in anderen Programmiersprachen: Java

▶ Ad-Hoc Polymorphie: Interface und abstrakte Klassen

▶ Flexibler in Java: beliebige Parameter etc.

26 [1]

Polymorphie in anderen Programmiersprachen: C

▶ "Polymorphie" in C: void *

```
struct list {
  void *head;
  struct list *tail;
}
```

▶ Gegeben:

```
int x = 7;
struct list s = { &x, NULL };
```

▶ s.head hat Typ void *:

```
int y;
y= *(int *)s.head;
```

▶ Nicht möglich: head direkt als Skalar (e.g. int)

▶ C++: Templates

27 [1]

Zusammenfassung

▶ **Abstraktion** über Typen

- ▶ **Uniforme** Abstraktion: Typvariable, parametrische Polymorphie
- ▶ **Fallbasierte** Abstraktion: Überladung, ad-hoc-Polymorphie

▶ In der Sprache:

- ▶ Typklassen
- ▶ polymorphe Funktionen und Datentypen

▶ Vordefinierte Typen: Listen [a] und Tupel (a,b)

▶ Nächste Woche: Abstraktion über Funktionen

↔ Funktionen höherer Ordnung

28 [1]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 5 vom 11.11.2014: Funktionen Höherer Ordnung I

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- ▶ Funktionen höherer Ordnung:
 - ▶ Funktionen als gleichberechtigte Objekte
 - ▶ Funktionen als Argumente
- ▶ Spezielle Funktionen: map, filter, fold und Freunde

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

- ▶ Pfade:

```
cat :: Path -> Path -> Path
cat Mt q = q
cat (Cons i p) q = Cons i (cat p q)
```

```
rev :: Path -> Path
rev Mt = ...
rev (Cons i p) = ...
```

- ▶ Zeichenl Gelöst durch Polymorphie

```
cat :: MyString -> MyString -> MyString
cat Empty t = t
cat (Cons c s) t = Cons c (cat s t)
```

```
rev :: MyString -> MyString
rev Empty = Empty
rev (Cons c t) = cat (rev t) (Cons c Empty)
```

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

```
kasse :: Einkaufswagen -> Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

```
inventur :: Lager -> Int
inventur LeeresLager = 0
inventur (Lager a m l) = cent a m + inventur l
```

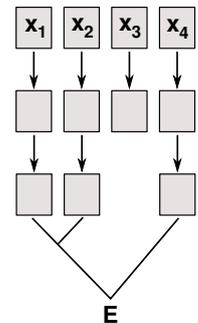
```
len :: MyString -> Int
len Empty = 0
len (Cons c str) = 1 + len str
```

Gemeinsamkeiten:

- ▶ ein Fall pro Konstruktor
- ▶ linearer rekursiver Aufruf
- ▶ durch Polymorphie nicht gelöst (keine Instanz einer Definition)

Muster der primitiven Rekursion

- ▶ Anwenden einer Funktion auf jedes Element der Liste
- ▶ möglicherweise Filtern bestimmter Elemente
- ▶ Kombination der Ergebnisse zu einem Gesamtergebnis E



Ein einheitlicher Rahmen

- ▶ Zwei ähnliche Funktionen:

<pre>toL :: String -> String toL [] = [] toL (c:cs) = toLower c : toL cs</pre>	<pre>toU :: String -> String toU [] = [] toU (c:cs) = toUpper c : toL cs</pre>
---	---

- ▶ Warum nicht ...

```
map f [] = []
map f (c:cs) = f c : map f cs

toL cs = map toLower cs
toU cs = map toUpper cs
```

- ▶ Funktion f als Argument
- ▶ Was hätte map für einen Typ?

Funktionen Höherer Ordnung

Slogan

"Functions are first-class citizens."

- ▶ Funktionen sind gleichberechtigt: Ausdrücke wie alle anderen
- ▶ Grundprinzip der funktionalen Programmierung
- ▶ Modellierung allgemeiner Berechnungsmuster
- ▶ Kontrollabstraktion

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an

- Signatur:

```
map :: (α → β) → [α] → [β]
```

- Definition wie oben

```
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"
→ map toLower ('A':'B':[]) → toLower 'A' : map toLower ('B':[])
→ 'a':map toLower ('B':[]) → 'a':toLower 'B':map toLower []
→ 'a':'b':map toLower [] → 'a':'b':[] ≡ "ab"
```

9 [33]

Funktionen als Argumente: filter

- Elemente **filtern**: filter

- Signatur:

```
filter :: (α → Bool) → [α] → [α]
```

- Definition

```
filter p [] = []
filter p (x:xs)
  | p x     = x : filter p xs
  | otherwise = filter p xs
```

- Beispiel:

```
letters :: String → String
letters = filter isAlpha
```

10 [33]

Beispiel filter : Primzahlen

- Sieb des Eratosthenes

- Für jede gefundene Primzahl p alle Vielfachen heraus sieben
- Dazu: filter ($\lambda n \rightarrow \text{mod } n \ p \neq 0$) ps
- Namenlose (anonyme) Funktion

```
sieve :: [Integer] → [Integer]
sieve [] = []
sieve (p:ps) = p : sieve (filter (\q → mod q p ≠ 0) ps)
```

- Alle Primzahlen:

```
primes :: [Integer]
primes = sieve [2..]
```

- Die ersten n Primzahlen:

```
n_primes :: Int → [Integer]
n_primes n = take n primes
```

11 [33]

Funktionen als Argumente: Funktionskomposition

- Funktionskomposition (mathematisch)

```
(o) :: (β → γ) → (α → β) → α → γ
(f o g) x = f (g x)
```

- Vordefiniert

- Lies: f nach g

- Funktionskomposition **vorwärts**:

```
(>.>) :: (α → β) → (β → γ) → α → γ
(f >.> g) x = g (f x)
```

- Nicht** vordefiniert!

12 [33]

η -Kontraktion

- Vertauschen der **Argumente** (vordefiniert):

```
flip :: (α → β → γ) → β → α → γ
flip f b a = f a b
```

- Damit Funktionskomposition vorwärts:

```
(>.>) :: (α → β) → (β → γ) → α → γ
(>.>) = flip (o)
```

- Da fehlt doch was?!** Nein:

```
(>.>) = flip (o) ≡ (>.>) f g a = flip (o) f g a
```

- Warum?

13 [33]

η -Äquivalenz und eta-Kontraktion

η -Äquivalenz

Sei f eine Funktion $f : A \rightarrow B$, dann gilt $f = \lambda x. f x$

- Warum? **Extensionale** Gleichheit von Funktionen

- In Haskell: **η -Kontraktion**

- Bedingung: Ausdruck $E :: \alpha \rightarrow \beta$, Variable $x :: \alpha$, E darf x nicht enthalten
- $$\lambda x \rightarrow E x \equiv E$$

- Syntaktischer Spezialfall **Funktionsdefinition** (**punktfreie** Notation)

$$f x = E x \equiv f = E$$

14 [33]

Partielle Applikation

- Funktionskonstruktor **rechtsassoziativ**:

$$a \rightarrow b \rightarrow c \equiv a \rightarrow (b \rightarrow c)$$

- Inbesondere**: $(a \rightarrow b) \rightarrow c \neq a \rightarrow (b \rightarrow c)$

- Funktionsanwendung ist **linksassoziativ**:

$$f a b \equiv (f a) b$$

- Inbesondere**: $f (a b) \neq (f a) b$

- Partielle** Anwendung von Funktionen:

- Für $f :: a \rightarrow b \rightarrow c$, $x :: a$ ist $f x :: b \rightarrow c$ (**closure**)

- Beispiele:

- `map toLower :: String → String`
- `(3 ==) :: Int → Bool`
- `concat o map (replicate 2) :: String → String`

15 [33]

Einfache Rekursion

- Einfache Rekursion**: gegeben durch

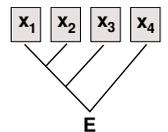
- eine Gleichung für die leere Liste

- eine Gleichung für die nicht-leere Liste (mit **einem** rekursiven Aufruf)

- Beispiel: `kasse`, `inventur`, `sum`, `concat`, `length`, `(++)`, ...

- Auswertung:

```
sum [4,7,3] → 4 + 7 + 3 + 0
concat [A, B, C] → A ++ B ++ C ++ []
length [4, 5, 6] → 1 + 1 + 1 + 0
```



16 [33]

Einfache Rekursion

► **Allgemeines Muster:**

```
f [] = A
f (x:xs) = x ⊗ f xs
```

► **Parameter der Definition:**

- Startwert (für die leere Liste) $A :: \beta$
- Rekursionsfunktion $\otimes :: \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$

► **Auswertung:**

```
f [x1,..., xn] = x1 ⊗ x2 ⊗ ... ⊗ xn ⊗ A
```

- **Terminiert** immer (wenn Liste endlich und \otimes, A terminieren)
- Entspricht einfacher Iteration (while-Schleife)

17 [33]

Einfach Rekursion durch foldr

► **Einfache** Rekursion

- Basisfall: leere Liste
- Rekursionsfall: Kombination aus Listenkopf und Rekursionswert

► **Signatur**

```
foldr :: ( $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$ )  $\rightarrow \beta \rightarrow [\alpha] \rightarrow \beta$ 
```

► **Definition**

```
foldr f e [] = e
foldr f e (x:xs) = f x (foldr f e xs)
```

18 [33]

Beispiele: foldr

► **Summieren** von Listenelementen.

```
sum :: [Int]  $\rightarrow$  Int
sum xs = foldr (+) 0 xs
```

► **Flachklopfen** von Listen.

```
concat :: [[a]]  $\rightarrow$  [a]
concat xs = foldr (++) [] xs
```

► **Länge** einer Liste

```
length :: [a]  $\rightarrow$  Int
length xs = foldr ( $\lambda x n \rightarrow n + 1$ ) 0 xs
```

19 [33]

Beispiele: foldr

► **Konjunktion** einer Liste

```
and :: [Bool]  $\rightarrow$  Bool
and xs = foldr (&&) True xs
```

► **Konjunktion** von Prädikaten

```
all :: ( $\alpha \rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  [α]  $\rightarrow$  Bool
all p = and ◦ map p
```

20 [33]

Der Shoppe, revisited.

► **Suche** nach einem Artikel alt:

```
suche :: Artikel  $\rightarrow$  Lager  $\rightarrow$  Maybe Menge
suche art (Lager (Posten lart m: l))
  | art == lart = Just m
  | otherwise = suche art (Lager l)
suche _ (Lager []) = Nothing
```

► **Suche** nach einem Artikel neu:

```
suche :: Artikel  $\rightarrow$  Lager  $\rightarrow$  Maybe Menge
suche a (Lager l) =
  listToMaybe (map ( $\lambda$ (Posten _ m)  $\rightarrow$  m)
                (filter ( $\lambda$ (Posten la _)  $\rightarrow$  la == a) l))
```

21 [33]

Der Shoppe, revisited.

► **Kasse** alt:

```
kasse :: Einkaufswagen  $\rightarrow$  Int
kasse (Einkaufswagen []) = 0
kasse (Einkaufswagen (p: e)) = cent p + kasse (Einkaufswagen e)
```

► **Kasse** neu:

```
kasse' :: Einkaufswagen  $\rightarrow$  Int
kasse' (Einkaufswagen ps) = foldr ( $\lambda p r \rightarrow$  cent p + r) 0 ps
```

```
kasse :: Einkaufswagen  $\rightarrow$  Int
kasse (Einkaufswagen ps) = sum (map cent ps)
```

22 [33]

Der Shoppe, revisited.

► **Kassenbon** formatieren neu:

```
kassenbon :: Einkaufswagen  $\rightarrow$  String
kassenbon ew@(Einkaufswagen as) =
  "Bob's_Aulde_Grocery_Shoppe\n\n" ++
  "Artikel_.....Menge_.....Preis\n" ++
  ".....\n" ++
  concatMap artikel as ++
  ".....\n" ++
  "Summe: " ++ formatR 31 (showEuro (kasse ew))
```

```
artikel :: Posten  $\rightarrow$  String
artikel p@(Posten a m) =
  formatL 20 (show a) ++
  formatR 7 (menge m) ++
  formatR 10 (showEuro (cent p)) ++ "\n"
```

23 [33]

Noch ein Beispiel: rev

► **Listen umdrehen:**

```
rev :: [α]  $\rightarrow$  [α]
rev [] = []
rev (x:xs) = rev xs ++ [x]
```

► **Mit fold:**

```
rev' = foldr snoc []
snoc ::  $\alpha \rightarrow [\alpha] \rightarrow [\alpha]$ 
snoc x xs = xs ++ [x]
```

► **Unbefriedigend:** doppelte Rekursion $O(n^2)$!

24 [33]

Einfache Rekursion durch foldl

- foldr faltet von rechts:

$$\text{foldr } \otimes [x_1, \dots, x_n] A = x_1 \otimes (x_2 \otimes (\dots (x_n \otimes A)))$$
- Warum nicht andersherum?

$$\text{foldl } \otimes [x_1, \dots, x_n] A = (((A \otimes x_1) \otimes x_2) \dots) \otimes x_n$$
- Definition von foldl :

$$\begin{aligned} \text{foldl} &:: (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow [\beta] \rightarrow \alpha \\ \text{foldl } f \ a \ [] &= a \\ \text{foldl } f \ a \ (x:xs) &= \text{foldl } f \ (f \ a \ x) \ xs \end{aligned}$$

25 [33]

Beispiel: rev revisited

- Listenumkehr ist falten von links:

$$\text{rev } xs = \text{foldl } (\text{flip } (:)) [] \ xs$$
- Nur noch eine Rekursion $O(n)$!

26 [33]

foldr vs. foldl

- $f = \text{foldr } \otimes A$ entspricht

$$\begin{aligned} f [] &= A \\ f (x:xs) &= x \otimes f \ xs \end{aligned}$$
 - Kann nicht strikt in xs sein, z.B. and, or
 - Konsumiert nicht immer die ganze Liste
 - Auch für nichtendliche Listen anwendbar
- $f = \text{foldl } \otimes A$ entspricht

$$\begin{aligned} f \ xs &= g \ A \ xs \\ g \ a \ [] &= a \\ g \ a \ (x:xs) &= g \ (a \otimes x) \ xs \end{aligned}$$
 - Endrekursiv (effizient) und strikt in xs
 - Konsumiert immer die ganze Liste
 - Divergiert immer für nichtendliche Listen

27 [33]

foldl = foldr

Definition (Monoid)

(\otimes, A) ist ein Monoid wenn

$$\begin{aligned} A \otimes x &= x && \text{(Neutrales Element links)} \\ x \otimes A &= x && \text{(Neutrales Element rechts)} \\ (x \otimes y) \otimes z &= x \otimes (y \otimes z) && \text{(Assoziativität)} \end{aligned}$$

Theorem

Wenn (\otimes, A) Monoid, dann für alle A, xs

$$\text{foldl } \otimes A \ xs = \text{foldr } \otimes A \ xs$$

- Beispiele: length, concat, sum
- Gegenbeispiele: rev, all

28 [33]

Übersicht: vordefinierte Funktionen auf Listen II

```
map    :: (α → β) → [α] → [β]    — Auf alle anwenden
filter :: (α → Bool) → [α] → [α] — Elemente filtern
foldr  :: (α → β → β) → β → [α] → β — Falten v. rechts
foldl  :: (β → α → β) → β → [α] → β — Falten v. links
mapConcat :: (α → [β]) → [α] → [β] — map und concat
takeWhile :: (α → Bool) → [α] → [α] — längster Prefix mit p
dropWhile :: (α → Bool) → [α] → [α] — Rest von takeWhile
span    :: (α → Bool) → [α] → ([α], [α]) — take und drop
any     :: (α → Bool) → [α] → Bool — p gilt mind. einmal
all     :: (α → Bool) → [α] → Bool — p gilt für alle
elem    :: (Eq α) ⇒ α → [α] → Bool — Ist enthalten?
zipWith :: (α → β → γ) → [α] → [β] → [γ] — verallgemeinertes zip
```

29 [33]

Funktionen Höherer Ordnung: Java

- Java: keine direkte Syntax für Funktionen höherer Ordnung
- Folgendes ist nicht möglich:

```
interface Collection {
    Object fold(Object f(Object a, Collection c), Object a);
}
```

- Aber folgendes:

```
interface Foldable { Object f (Object a); }
interface Collection { Object fold(Foldable f, Object a); }
```

- Vergleiche Iterator aus Collections Framework (Java SE 6):

```
public interface Iterator<E> {
    boolean hasNext();
    E next();
}
```

- Seit Java SE 8 (März 2014): Anonyme Funktionen (Lambda-Ausdrücke)

30 [33]

Funktionen Höherer Ordnung: C

- Implizit vorhanden: Funktionen = Zeiger auf Funktionen

```
extern list filter(int f(void *x), list l);
```

```
extern list map(void *(f)(void *x), list l);
```

- Keine direkte Syntax (e.g. namenlose Funktionen)
- Typsystem zu schwach (keine Polymorphie)
- Benutzung: qsort (C-Standard 7.20.5.2)

```
include <stdlib.h>
void qsort(void *base, size_t nmemb, size_t size,
           int (*compar)(const void *, const void *));
```

31 [33]

Funktionen Höherer Ordnung: C

Implementierung von map:

```
list map(void *(f)(void *x), list l)
{
    list c;
    for (c = l; c != NULL; c = c->next) {
        c->elem = f(c->elem);
    }
    return l;
}
```

- Typsystem zu schwach:

```
{
    *(int *)x = *(int *)x*2;
    return x;
}
void prt(void *x)
```

```
printf("List: %u", mapM(prt, l)); printf("\n");
```

32 [33]

Zusammenfassung

- ▶ Funktionen **höherer Ordnung**
 - ▶ Funktionen als **gleichberechtigte Objekte** und **Argumente**
 - ▶ Partielle Applikation, η -Kontraktion, namenlose Funktionen
 - ▶ Spezielle Funktionen höherer Ordnung: `map`, `filter`, `fold` und Freunde
- ▶ Formen der **Rekursion**:
 - ▶ Einfache Rekursion entspricht `foldr`

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2776

1 [34]

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

2 [34]

Heute

- ▶ Die Geheimnisse von map und foldr gelüftet.
- ▶ map und foldr sind nicht nur für Listen.
- ▶ Funktionen höherer Ordnung als Entwurfsmuster

3 [34]

foldr ist kanonisch

- ▶ map und filter sind durch foldr darstellbar:

```
map :: (α → β) → [α] → [β]
map f = foldr ((:). f) []
```

```
filter :: (α → Bool) → [α] → [α]
filter p = foldr (λ a as → if p a then a:as
                        else as) []
```

foldr ist die **kanonische einfach rekursive** Funktion.

- ▶ Alle einfach rekursiven Funktionen sind als Instanz von foldr darstellbar.

foldr (:) [] = id

4 [34]

map als strukturerhaltende Abbildung

map ist die kanonische **strukturerhaltende Abbildung**.

- ▶ **Struktur** (Shape) eines Datentyps T α ist $T ()$.
 - ▶ Für jeden Datentyp kann man kanonische Funktion $\text{shape} :: T \alpha \rightarrow T ()$ angeben
 - ▶ Für Listen: $[(())] \cong \text{Nat}$.
- ▶ Für map gelten folgende Aussagen:

map id = id

map f ∘ map g = map (f ∘ g)

shape. map f = shape

5 [34]

Grenzen von foldr

- ▶ Andere rekursive Struktur über Listen
 - ▶ Quicksort: baumartige Rekursion

```
qsort :: Ord a => [a] → [a]
qsort [] = []
qsort xs = qsort (filter (< head xs) xs) ++
            filter (head xs ==) xs ++
            qsort (filter (head xs <) xs)
```

- ▶ Rekursion nicht über Listenstruktur:
 - ▶ take: Rekursion über Int

```
take :: Int → [a] → [a]
take n _ | n ≤ 0 = []
take _ [] = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

- ▶ Version mit foldr divergiert für nicht-endliche Listen

6 [34]

fold für andere Datentypen

fold ist universell

Jeder algebraische Datentyp T hat genau ein foldr.

- ▶ Kanonische Signatur für T :
 - ▶ Pro Konstruktor C ein Funktionsargument f_C
 - ▶ Freie Typvariable β für T
- ▶ Kanonische Definition:
 - ▶ Pro Konstruktor C eine Gleichung
 - ▶ Gleichung wendet Funktionsparameter f_C auf Argumente an

data IL = Cons Int IL | Err String | Mt

```
foldIL :: (Int → β → β) → (String → β) → β → IL → β
foldIL f e a (Cons i il) = f i (foldIL f e a il)
foldIL f e a (Err str) = e str
foldIL f e a Mt = a
```

7 [34]

fold für bekannte Datentypen

- ▶ Bool: Fallunterscheidung:

data Bool = True | False

```
foldBool :: β → β → Bool → β
foldBool a1 a2 True = a1
foldBool a1 a2 False = a2
```

- ▶ Maybe a: Auswertung

data Maybe α = Nothing | Just α

```
foldMaybe :: β → (α → β) → Maybe α → β
foldMaybe b f Nothing = b
foldMaybe b f (Just a) = f a
```

- ▶ Als maybe vordefiniert

8 [34]

fold für bekannte Datentypen

- ▶ Tupel: die uncurry-Funktion

```
foldPair :: (α → β → γ) → (α, β) → γ
foldPair f (a, b) = f a b
```

- ▶ Natürliche Zahlen: Iterator

```
data Nat = Zero | Succ Nat
foldNat :: β → (β → β) → Nat → β
foldNat e f Zero = e
foldNat e f (Succ n) = f (foldNat e f n)
```

9 [34]

fold für binäre Bäume

- ▶ Binäre Bäume:

```
data Tree α = Mt | Node α (Tree α) (Tree α)
```

- ▶ Label **nur** in den Knoten

- ▶ Instanzen von Map und Fold:

```
mapT :: (α → β) → Tree α → Tree β
mapT f Mt = Mt
mapT f (Node a l r) =
  Node (f a) (mapT f l) (mapT f r)
```

```
foldT :: (α → β → β) → β → Tree α → β
foldT f e Mt = e
foldT f e (Node a l r) =
  f a (foldT f e l) (foldT f e r)
```

- ▶ Kein (offensichtliches) Filter

10 [34]

Funktionen mit fold und map

- ▶ Höhe des Baumes berechnen:

```
height :: Tree α → Int
height = foldT (\_ l r → 1 + max l r) 0
```

- ▶ Inorder-Traversierung der Knoten:

```
inorder :: Tree α → [α]
inorder = foldT (\a l r → l ++ [a] ++ r) []
```

11 [34]

Kanonische Eigenschaften von foldT und mapT

- ▶ Auch hier gilt:

```
foldTree Node Mt = id
mapTree id = id
mapTree f ∘ mapTree g = mapTree (f ∘ g)
shape (mapTree f xs) = shape xs
```

- ▶ Mit shape :: Tree α → Tree ()

12 [34]

Das Labyrinth

- ▶ Das Labyrinth als variadischer Baum:

```
data VTree α = Node α [VTree α]
```

```
type Lab α = VTree α
```

- ▶ Auch hierfür foldT und mapT:

```
foldT :: (α → [β] → β) → VTree α → β
foldT f (Node a ns) = f a (map (foldT f) ns)
```

```
mapT :: (α → β) → VTree α → VTree β
mapT f (Node a ns) = Node (f a) (map (mapT f) ns)
```

13 [34]

Suche im Labyrinth

- ▶ Tiefensuche via foldT

```
dfts' :: Lab α → [Path α]
dfts' = foldT add where
  add a [] = [[a]]
  add a ps = concatMap (map (a :)) ps
```

- ▶ Problem:

- ▶ foldT terminiert **nicht** für **zyklische** Strukturen
- ▶ Auch nicht, wenn add prüft ob a schon enthalten ist
- ▶ Pfade werden vom **Ende** konstruiert

14 [34]

Alternativen: Breitensuche

- ▶ Alternative 1: **Tiefensuche** direkt rekursiv, mit **Terminationsprädikat**

```
dfts :: Eq α ⇒ (Lab α → Bool) → Lab α → [Path α]
```

- ▶ Alternative 2: Breitensuche für **potenziell unendliche** Liste **aller** Pfade

```
bfts :: Lab α → [Path α]
bfts l = bfts0 [] [l] where
  bfts0 p [] = []
  bfts0 p (Node a cs:ns) =
    reverse (a:p) : (bfts0 p ns ++ bfts0 (a:p) cs)
```

- ▶ Gegensatz zur Tiefensuche: Liste kann **konsumiert** werden

15 [34]

Zusammenfassung map und fold

- ▶ map und fold sind **kanonische** Funktionen höherer Ordnung

- ▶ Für jeden Datentyp definierbar

- ▶ foldl **nur** für Listen (**linearer** Datentyp)

- ▶ fold kann bei **zyklischen** Argumenten nicht terminieren

- ▶ Problem: Termination von fold **nur lokal** entscheidbar

- ▶ Im Labyrinth braucht man den **Kontext** um zu entscheiden ob ein Knoten ein Blatt ist

16 [34]

Funktionen Höherer Ordnung als Entwurfsmethodik

- ▶ Kombination von Basisoperationen zu komplexen Operationen
- ▶ **Kombinatoren** als Muster zur Problemlösung:
 - ▶ **Einfache** Basisoperationen
 - ▶ **Wenige** Kombinationsoperationen
 - ▶ Alle anderen Operationen **abgeleitet**
- ▶ **Kompositionalität**:
 - ▶ Gesamtproblem lässt sich **zerlegen**
 - ▶ Gesamtlösung durch **Zusammensetzen** der Einzellösungen

17 [34]

Kombinatoren im engeren Sinne

Definition (Kombinator)

Ein **Kombinator** ist ein punktfrei definierte Funktion höherer Ordnung.

- ▶ Herkunft: **Kombinatorlogik** (Schönfinkel, 1924)

$$\begin{aligned}K x y &\triangleright x \\S x y z &\triangleright x z (y z) \\I x &\triangleright x\end{aligned}$$

S, K, I sind **Kombinatoren**

- ▶ Fun fact #1: kann alle berechenbaren Funktionen ausdrücken
- ▶ Fun fact #2: S und K sind genug: $I = S K K$

18 [34]

Beispiel: Parser

- ▶ **Parser** bilden Eingabe auf Parsierungen ab
 - ▶ Mehrere Parsierungen möglich
 - ▶ Backtracking möglich
- ▶ Kombinatoransatz:
 - ▶ **Basisparser** erkennen **Terminalsymbole**
 - ▶ **Parserkombinatoren** zur Konstruktion:
 - ▶ **Sequenzierung** (erst A , dann B)
 - ▶ **Alternierung** (entweder A oder B)
 - ▶ **Abgeleitete** Kombinatoren (z.B. Listen A^* , nicht-leere Listen A^+)

19 [34]

Modellierung in Haskell

Welcher **Typ** für Parser?

```
type Parse  $\alpha \beta = [\alpha] \rightarrow [(\beta, [\alpha])]$ 
```

- ▶ Parametrisiert über **Eingabetyp** (Token) α und **Ergebnis** β
- ▶ Parser übersetzt **Token** in **Ergebnis** (abstrakte Syntax)
- ▶ Muss **Rest** der Eingabe modellieren
- ▶ Muss **mehrdeutige** Ergebnisse modellieren
- ▶ Beispiel: $"4*5+3" \rightarrow [(4, "*4+3"), (4*5, "+3"), (4*5+3, "")]$

20 [34]

Basisparser

- ▶ Erkennt **nichts**:

```
none :: Parse  $\alpha \beta$   
none = const []
```

- ▶ Erkennt **alles**:

```
succeed ::  $\beta \rightarrow$  Parse  $\alpha \beta$   
succeed b inp = [(b, inp)]
```

- ▶ Erkennt **einzelne Token**:

```
spot :: ( $\alpha \rightarrow$  Bool)  $\rightarrow$  Parse  $\alpha \alpha$   
spot p [] = []  
spot p (x:xs) = if p x then [(x, xs)] else []
```

```
token :: Eq  $\alpha \Rightarrow \alpha \rightarrow$  Parse  $\alpha \alpha$   
token t = spot (t ==)
```

- ▶ Warum nicht none, succeed durch spot? Typ!

21 [34]

Basiskombinatoren: alt, >*>

- ▶ **Alternierung**:

- ▶ Erste Alternative wird bevorzugt

```
infixl 3 'alt'  
alt :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha \beta$   
alt p1 p2 i = p1 i ++ p2 i
```

- ▶ **Sequenzierung**:

- ▶ Rest des ersten Parsers als Eingabe für den zweiten

```
infixl 5 >*>  
(>*>) :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha \gamma \rightarrow$  Parse  $\alpha (\beta, \gamma)$   
(>*>) p1 p2 i =  
concatMap ( $\lambda(b, r) \rightarrow$   
map ( $\lambda(c, s) \rightarrow ((b, c), s)$ ) (p2 r)) (p1 i)
```

22 [34]

Basiskombinatoren: use

- ▶ map für Parser (**Rückgabe** weiterverarbeiten):

```
infix 4 'use', 'use2'  
use :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow$  Parse  $\alpha \gamma$   
use p f i = map ( $\lambda(o, r) \rightarrow (f o, r)$ ) (p i)
```

```
use2 :: Parse  $\alpha (\beta, \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta) \rightarrow$  Parse  $\alpha \delta$   
use2 p f = use p (uncurry f)
```

- ▶ Damit z.B. **Sequenzierung rechts/links**:

```
infixl 5 >*, >*>  
(*>) :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha \gamma \rightarrow$  Parse  $\alpha \gamma$   
(*>) :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha \gamma \rightarrow$  Parse  $\alpha \beta$   
p1 *> p2 = p1 >*> p2 'use' snd  
p1 >* p2 = p1 >*> p2 'use' fst
```

23 [34]

Abgeleitete Kombinatoren

- ▶ Listen: $A^* ::= AA^* \mid \varepsilon$

```
list :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha [\beta]$   
list p = p >*> list p 'use2' (:)  
'alt' succeed []
```

- ▶ Nicht-leere Listen: $A^+ ::= AA^*$

```
some :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow$  Parse  $\alpha [\beta]$   
some p = p >*> list p 'use2' (:)
```

- ▶ NB. Präzedenzen: $>*>$ (5) vor use (4) vor alt (3)

24 [34]

Verkapselung

► Hauptfunktion:

- Eingabe muß vollständig parsiert werden
- Auf Mehrdeutigkeit prüfen

```
parse :: Parse  $\alpha \beta \rightarrow [\alpha] \rightarrow$  Either String  $\beta$ 
parse p i =
  case filter (null . snd) $ p i of
    []   → Left "Input_does_not_parse"
    [(e, _)] → Right e
    _     → Left "Input_is_ambiguous"
```

► Schnittstelle:

- Nach außen nur Typ Parse sichtbar, plus Operationen darauf

25 [34]

Grammatik für Arithmetische Ausdrücke

$$\begin{aligned} \text{Expr} &::= \text{Term} + \text{Term} \mid \text{Term} \\ \text{Term} &::= \text{Factor} * \text{Factor} \mid \text{Factor} \\ \text{Factor} &::= \text{Variable} \mid (\text{Expr}) \\ \text{Variable} &::= \text{Char}^+ \\ \text{Char} &::= a \mid \dots \mid z \mid A \mid \dots \mid Z \end{aligned}$$

26 [34]

Abstrakte Syntax für Arithmetische Ausdrücke

► Zur Grammatik **abstrakte Syntax**

```
data Expr = Plus Expr Expr
          | Times Expr Expr
          | Var String
```

- Hier Unterscheidung Term, Factor, Number unnötig.

27 [34]

Parsierung Arithmetischer Ausdrücke

- Token: Char
- Parsierung von Factor

```
pFactor :: Parse Char Expr
pFactor = some (spot isAlpha) 'use' Var
        'alt' token '(' *> pExpr >*> token ')'
```

- Parsierung von Term

```
pTerm :: Parse Char Expr
pTerm =
  pFactor >*> token '*' >*> pFactor 'use2' Times
  'alt' pFactor
```

- Parsierung von Expr

```
pExpr :: Parse Char Expr
pExpr = pTerm >*> token '+' >*> pTerm 'use2' Plus
        'alt' pTerm
```

28 [34]

Die Hauptfunktion

- Lexing: Leerzeichen aus der Eingabe entfernen

```
parseExpr :: String → Expr
parseExpr i =
  case parse pExpr (filter (not.isSpace) i) of
    Right e → e
    Left err → error err
```

29 [34]

Ein kleiner Fehler

- **Mangel:** a+b+c führt zu Syntaxfehler — Fehler in der Grammatik

- Behebung: **Änderung** der Grammatik

$$\begin{aligned} \text{Expr} &::= \text{Term} + \text{Expr} \mid \text{Term} \\ \text{Term} &::= \text{Factor} * \text{Term} \mid \text{Factor} \\ \text{Factor} &::= \text{Variable} \mid (\text{Expr}) \\ \text{Variable} &::= \text{Char}^+ \\ \text{Char} &::= a \mid \dots \mid z \mid A \mid \dots \mid Z \end{aligned}$$

- Abstrakte Syntax bleibt

30 [34]

Änderung des Parsers

- Entsprechende Änderung des Parsers in pTerm

```
pTerm :: Parse Char Expr
pTerm =
  pFactor >*> token '*' >*> pTerm 'use2' Times
  'alt' pFactor
```

- ... und in pExpr:

```
pExpr :: Parse Char Expr
pExpr = pTerm >*> token '+' >*> pExpr 'use2' Plus
        'alt' pTerm
```

- pFactor und Hauptfunktion bleiben.

31 [34]

Erweiterung zu einem Taschenrechner

- Zahlen:

$$\begin{aligned} \text{Factor} &::= \text{Variable} \mid \text{Number} \mid \dots \\ \text{Number} &::= \text{Digit}^+ \\ \text{Digit} &::= 0 \mid \dots \mid 9 \end{aligned}$$

- Eine einfache **Eingabesprache**:

$$\text{Input} ::= ! \text{Variable} = \text{Expr} \mid \$ \text{Expr}$$

- Eine **Auswertungsfunktion**:

```
type State = [(String, Integer)]
```

```
eval :: State → Expr → Integer
```

```
run :: State → String → (State, String)
```

32 [34]

Zusammenfassung Parserkombinatoren

- ▶ **Systematische Konstruktion** des Parsers aus der Grammatik.
- ▶ **Kompositional:**
 - ▶ Lokale Änderung der Grammatik führt zu lokaler Änderung im Parser
 - ▶ Vgl. Parsergeneratoren (yacc/bison, antlr, happy)
- ▶ Struktur von Parse zur Benutzung irrelevant
 - ▶ Vorsicht bei **Mehrdeutigkeiten** in der Grammatik (Performance-Fälle)
 - ▶ Einfache Implementierung (wie oben) skaliert nicht
 - ▶ Effiziente Implementation mit **gleicher Schnittstelle** auch für **große** Eingaben geeignet.

33 [34]

Zusammenfassung

- ▶ map und fold sind kanonische Funktionen höherer Ordnung
- ▶ ... und für alle Datentypen definierbar
- ▶ **Kombinatoren:** Funktionen höherer Ordnung als **Entwurfsmethodik**
 - ▶ Einfache **Basisoperationen**
 - ▶ **Wenige** aber **mächtige Kombinationsoperationen**
 - ▶ Reiche Bibliothek an **abgeleiteten** Operationen
- ▶ Nächste Woche: wie prüft man den Typ von

```
(>*) p1 p2 i =  
  concatMap (\(b, r) →  
    map (\(c, s) → ((b, c), s)) (p2 r)) (p1 i)
```

→ **Typinferenz!**

34 [34]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 7 vom 25.11.2014: Typinferenz

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt der Vorlesung

- ▶ Wozu Typen?
- ▶ Was ist ein **Typsystem**?
- ▶ Herleitung von Typen und Prüfung der Typkorrektheit (**Typinferenz**)

Wozu Typen?

- ▶ Frühzeitiges Aufdecken "offensichtlicher" Fehler
- ▶ "Once it type checks, it usually works"
- ▶ Hilfestellung bei Änderungen von Programmen
- ▶ Strukturierung großer Systeme auf Modul- bzw. Klassenebene
- ▶ Effizienz

Was ist ein Typsystem?

Ein Typsystem ist eine handhabbare syntaktische Methode, um die Abwesenheit bestimmter Programmverhalten zu beweisen, indem Ausdrücke nach der Art der Werte, die sie berechnen, klassifiziert werden.
(Benjamin C. Pierce, *Types and Programming Languages*, 2002)

Slogan:

Well-typed programs can't go wrong
(Robin Milner)

Typen in Haskell (The Story So Far)

- ▶ Primitive Basisdatentypen: Bool, Double
- ▶ Funktionstypen: $\text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}$, $[\text{Double}] \rightarrow \text{Double}$
- ▶ Typkonstruktoren: [], (...), Foo
- ▶ Typvariablen:
 - $\text{fst} :: (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha$
 - $\text{length} :: [\alpha] \rightarrow \text{Int}$
 - $\text{map} :: (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [\alpha] \rightarrow [\beta]$
- ▶ Typklassen:
 - $\text{elem} :: \text{Eq } a \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow \text{Bool}$
 - $\text{max} :: \text{Ord } a \Rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a$

Typinferenz: Das Problem

- ▶ Gegeben Ausdruck der Form
- ```
f m xs = m + length xs
```
- ▶ Frage: welchen Typ hat f?
    - ▶ Unterfrage: ist die angegebene Typsignatur korrekt?
  - ▶ Informelle Ableitung

$$\begin{array}{c}
 f \ m \ xs \ = \ m \ + \ \text{length} \ xs \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & & [\alpha] \rightarrow \text{Int} \\
 & & \uparrow \\
 & & \text{Int} \\
 & & \uparrow \\
 & & [\alpha] \\
 \\
 \text{Int} & & \text{Int} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Int} & & \text{Int} \\
 \\
 f \ :: \ \text{Int} \rightarrow [\alpha] \rightarrow \text{Int}
 \end{array}
 \end{array}$$

## Typinferenz

- ▶ Mathematisch **exaktes** System zur **Typbestimmung**
  - ▶ Antwort auf die Frage: welchen Typ hat ein Ausdruck?
- ▶ Formalismus: **Typableitungen** der Form

$$\Gamma \vdash e :: \tau$$

- ▶  $\Gamma$  — Typumgebung (Zuordnung Symbole zu Typen)
- ▶  $e$  — Term
- ▶  $\tau$  — Typ
- ▶ Beschränkung auf eine **Kernsprache**

## Kernsprache: Ausdrücke

- Beschränkung auf eine kompakte **Kernsprache**:

$$e ::= \text{var} \quad \begin{array}{l} | \lambda \text{ var. } e_1 \\ | e_1 e_2 \\ | \text{let var} = e_1 \text{ in } e_2 \\ | \text{case } e_1 \text{ of} \\ \quad C_1 \text{ var}_1 \dots \text{var}_n \rightarrow e_1 \\ \quad \dots \end{array}$$

- Rest von Haskell hierin ausdrückbar:
- **if ... then ... else**, Guards, Mehrfachapplikation, Funktionsdefinition, **where**

9 [22]

## Kernsprache: Typen

- Typen sind gegeben durch:

$$T ::= \text{tvar} \quad \begin{array}{l} | C T_1 \dots T_n \end{array}$$

- **tvar** sind **Typvariablen**  $\alpha, \beta, \dots$
- **C** ist **Typkonstruktor** der Arität  $n$ . Beispiele:
  - Basistypen  $n = 0$  (Int, Bool)
  - Listen  $[t_1]$  mit  $n = 1$
  - **Funktions Typen**  $T_1 \rightarrow T_2$  mit  $n = 2$

10 [22]

## Typinferenzregeln

$$\frac{x :: t \in \Gamma}{\Gamma \vdash x :: t} \text{Var} \quad \frac{\Gamma, x :: s \vdash e :: t}{\Gamma \vdash \lambda x. e :: s \rightarrow t} \text{Abs}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e :: s \rightarrow t \quad \Gamma \vdash e' :: s}{\Gamma \vdash e e' :: t} \text{App}$$

$$\frac{\Gamma, x :: t_1 \vdash e_1 :: t_1 \quad \Gamma, x :: t_1 \vdash e_2 :: t_2}{\Gamma \vdash \text{let } x = e_1 \text{ in } e_2 :: t_2} \text{LetRec}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f :: s \quad \Gamma, y_{i,j} :: t_{i,j} \vdash p_i :: s \quad \Gamma, y_{i,j} :: t_{i,j} \vdash e_j :: t}{\Gamma \vdash \text{case } f \text{ of } p_i \rightarrow e_j :: t} \text{Cases}$$

11 [22]

## Beispielableitung formal

- Haskell-Program:  $f \ m \ xs = m + \text{len } xs$
- In unserer Sprache:  $\lambda m \ xs. m + \text{len } xs$
- Initialer Kontext  $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{+ :: \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}, \text{len} :: [\alpha] \rightarrow \text{Int}\}$
- Typableitungsproblem:  $C_0 \vdash \lambda m \ xs. m + \text{len } xs :: ?$
- Ableitung als Baum:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash + :: \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}}{\Gamma \vdash m + :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}} \text{Var} \quad \frac{\Gamma \vdash m :: \text{Int}}{\Gamma \vdash m :: \text{Int}} \text{Var} \quad \frac{\Gamma \vdash \text{len} :: [\alpha] \rightarrow \text{Int}}{\Gamma \vdash \text{len } xs :: \text{Int}} \text{Var} \quad \frac{\Gamma \vdash xs :: [\alpha]}{\Gamma \vdash xs :: [\alpha]} \text{Var}}{\Gamma \vdash m + \text{len } xs :: \text{Int}} \text{App} \quad \frac{\Gamma \vdash m + \text{len } xs :: \text{Int}}{\Gamma \vdash \lambda m \ xs. m + \text{len } xs :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}} \text{Abs} \quad \frac{\Gamma \vdash \lambda m \ xs. m + \text{len } xs :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}}{\Gamma \vdash \lambda m \ xs. m + \text{len } xs :: \text{Int} \rightarrow [\alpha] \rightarrow \text{Int}} \text{Abs}$$

12 [22]

## Ableitung formal

Bessere Notation:

- **linear**
- Von der Konklusion ausgehend (der Wurzel des Baumes)
- Letzte Spalte enthält angewandte Regel und Voraussetzungen

|                                                                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. $C_0 \vdash \lambda m \ xs. m + \text{len } xs :: \text{Int} \rightarrow [\alpha] \rightarrow \text{Int}$   | Abs[2]    |
| 2. $C_0, m :: \text{Int} \vdash \lambda xs. m + \text{len } xs :: [\alpha] \rightarrow \text{Int}$             | Abs[3]    |
| 3. $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} C_0, m :: \text{Int}, xs :: [\alpha] \vdash m + \text{len } xs :: \text{Int}$ | App[4, 7] |
| 4. $C_1 \vdash m + :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$                                                       | App[5, 6] |
| 5. $C_1 \vdash + :: \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}$                                  | Var       |
| 6. $C_1 \vdash m :: \text{Int}$                                                                                | Var       |
| 7. $C_1 \vdash \text{len } xs :: \text{Int}$                                                                   | App[8, 9] |
| 8. $C_1 \vdash \text{len} :: [\alpha] \rightarrow \text{Int}$                                                  | Var       |
| 9. $C_1 \vdash xs :: [\alpha]$                                                                                 | Var       |

13 [22]

## Problem: Typvariablen

- Sei  $D \stackrel{\text{def}}{=} \{id : \alpha \rightarrow \alpha\}$
- Typableitung  $D \vdash id \ id :: \alpha \rightarrow \alpha$  benötigt zwei **unterschiedliche** Instanziierung von  $id$
- Andererseits: in  $C \vdash \lambda x. x \ x :: ?$  darf  $x$  **nicht** unterschiedlich instanziiert werden.
- Deshalb: **Typschemata**

$$S ::= \forall \text{tvar. } S \mid T$$
- Zwei **zusätzliche Regeln** zur Instanziierung und Generalisierung

14 [22]

## Typinferenzregeln (vollständig)

$$\frac{x :: t \in \Gamma}{\Gamma \vdash x :: t} \text{Var} \quad \frac{\Gamma, x :: s \vdash e :: t}{\Gamma \vdash \lambda x. e :: s \rightarrow t} \text{Abs}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e :: s \rightarrow t \quad \Gamma \vdash e' :: s}{\Gamma \vdash e e' :: t} \text{App}$$

$$\frac{\Gamma, x :: t_1 \vdash e_1 :: t_1 \quad \Gamma, x :: t_1 \vdash e_2 :: t_2}{\Gamma \vdash \text{let } x = e_1 \text{ in } e_2 :: t_2} \text{LetRec}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f :: s \quad \Gamma, y_{i,j} :: t_{i,j} \vdash p_i :: s \quad \Gamma, y_{i,j} :: t_{i,j} \vdash e_j :: t}{\Gamma \vdash \text{case } f \text{ of } p_i \rightarrow e_j :: t} \text{Cases}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e :: \forall \alpha. t}{\Gamma \vdash e :: t \left[ \frac{s}{\alpha} \right]} \text{Spec} \quad \frac{\Gamma \vdash e :: t \quad \alpha \text{ nicht frei in } \Gamma}{\Gamma \vdash e :: \forall \alpha. t} \text{Gen}$$

15 [22]

## Beispiel: id revisited

Damit ist jetzt  $D \stackrel{\text{def}}{=} id : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$

- |                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. $D \vdash id \ id :: \forall \beta. \beta \rightarrow \beta$                     | Gen       |
| 2. $D \vdash id \ id :: \beta \rightarrow \beta$                                    | App[3, 5] |
| 3. $D \vdash id :: (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$ | Spec[4]   |
| 4. $D \vdash id :: \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$                       | Var       |
| 5. $D \vdash id :: \beta \rightarrow \beta$                                         | Spec[6]   |
| 6. $D \vdash id :: \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$                       | Var       |

16 [22]

## Typinferenz: Typen ableiten

- ▶ Das **Typinferenzproblem**:
  - ▶ Gegeben  $\Gamma$  und  $e$
  - ▶ Gesucht wird:  $\tau$  und  $\sigma$  so dass  $\sigma(\Gamma) \vdash e :: \tau$
- ▶ Berechnung von  $\tau$  und  $\sigma$  durch **Algorithmus W** (Damas-Milner)
- ▶ **Informell**:
  - ▶ Typbestimmung beginnt an den Blättern des Ableitungsbaumes (Regeln ohne Voraussetzungen)
  - ▶ **Konstanten** zuerst (Typ fest), dann **Variablen** (Typ offen)
  - ▶ Instantiierung für Typschemata und Typ für Variablen unbestimmt lassen, und konsistent anpassen
  - ▶ Typ mit Regeln wie Abs, App und Cases nach oben propagieren

17 [22]

## Beispiel: Bestimmung des Typs von map

Die Funktion map:

```
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

In unserer Kernsprache:

```
let map = $\lambda f \text{ ys. case ys of []} \rightarrow []; (x : xs) \rightarrow \text{map } f \text{ y in map}$
```

Ableitung mit  $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(\cdot) : \forall \alpha. \alpha \rightarrow [\alpha] \rightarrow \alpha\}$

18 [22]

## Beispiel: Bestimmung eines großen Typen

Die Sequenzierungsoperation für Parser:

```
(>*>) p1 p2 i =
 concatMap ($\lambda (b, r) \rightarrow$
 map ($\lambda (c, s) \rightarrow ((b, c), s)$) (p2 r)) (p1 i)
```

In unserer Kernsprache:

```
 $\lambda p1 p2 i. \text{concatMap}(\lambda br. \text{map}(\lambda cs. ((fst br, fst cs), snd cs))(p2 (snd br)))(p1 i)$
```

19 [22]

## Eigenschaften von W

- ▶ **Entscheidbarkeit** und **Korrektheit**: Für Kontext  $\Gamma$  und Term  $e$  terminiert Algorithmus W immer, und liefert  $W(\Gamma, e) = (\sigma, \tau) = (\sigma, \tau)$  so dass  $\sigma(\Gamma) \vdash e :: \tau$
- ▶ **Vollständigkeit**:  $W(\Gamma, e)$  berechnet den **allgemeinsten** Typen (**principal type**) von  $e$  (wenn es ihn gibt)
- ▶ **Aufwand** von W:
  - ▶ **Theoretisch**: exponentiell (**DEXPTIME**)
  - ▶ **Praktisch**: in relevanten Fällen annähernd **linear**

20 [22]

## Typen in anderen Programmiersprachen

- ▶ **Statische** Typisierung (Typableitung während **Übersetzung**)
  - ▶ Haskell, ML
  - ▶ Java, C++, C (optional)
- ▶ **Dynamische** Typisierung (Typüberprüfung zur **Laufzeit**)
  - ▶ PHP, Python, Ruby (*duck typing*)
- ▶ **Ungetypt**
  - ▶ Lisp,  $\LaTeX$ , Tcl, Shell

21 [22]

## Zusammenfassung

- ▶ Haskell implementiert **Typüberprüfung** durch **Typinferenz** (nach Damas-Milner)
- ▶ Kernelemente der Typinferenz:
  - ▶ Bindung von Typvariablen in Typschema ( $\forall \alpha. \tau$ )
  - ▶ Berechnung des Typen von den Blättern des Ableitungsbaumes her
  - ▶ Typinferenz berechnet **allgemeinsten** Typ
- ▶ Typinferenz hat praktisch **linearen**, theoretisch **exponentiellen** Aufwand
- ▶ Nächste Woche: Module und abstrakte Datentypen in Haskell

22 [22]



## ADTs in Haskell: Module

- ▶ Einschränkung der Sichtbarkeit durch **Verkapselung**
- ▶ **Modul**: Kleinste verkapselbare **Einheit**
- ▶ Ein **Modul** umfaßt:
  - ▶ Definitionen von Typen, Funktionen, Klassen
  - ▶ Deklaration der nach außen **sichtbaren** Definitionen
- ▶ Gleichzeitig: Modul  $\hat{=}$  Übersetzungseinheit (getrennte Übersetzung)

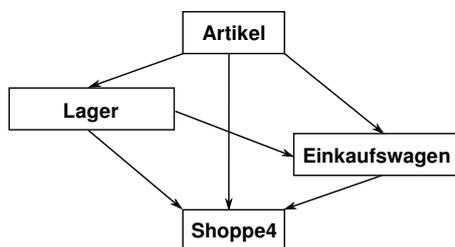
9 [35]

## Module: Syntax

- ▶ Syntax:  
`module Name( Bezeichner ) where Rumpf`
- ▶ Bezeichner können leer sein (dann wird alles exportiert)
- ▶ Bezeichner sind:
  - ▶ **Typen**: T, T(c1, ..., cn), T(..)
  - ▶ **Klassen**: C, C(f1, ..., fn), C(..)
  - ▶ Andere Bezeichner: **Werte**, **Felder**, **Klassenmethoden**
  - ▶ Importierte **Module**: `module M`
- ▶ Typsynonyme und Klasseninstanzen bleiben sichtbar
- ▶ Module können **rekursiv** sein (*don't try at home*)

10 [35]

## Refakturierung im Einkaufsparadies: Modularchitektur



11 [35]

## Refakturierung im Einkaufsparadies I: Artikel

- ▶ Es wird **alles** exportiert
- ▶ Reine Datenmodellierung

```
module Artikel where
import Data.Maybe
— Modellierung der Artikel.
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
 deriving (Eq, Show)
```

12 [35]

## Refakturierung im Einkaufsparadies II: Lager

```
module Lager(
 Posten,
 artikel,
 menge,
 posten,
 cent,
 Lager,
 leeresLager,
 einlagern,
 suche,
 inventur
) where
```

- ▶ Implementiert ADTs Posten und Lager
- ▶ Garantierte Invarianten:
  - ▶ Posten hat immer die korrekte Artikel und Menge:  
`posten :: Artikel -> Menge -> Maybe Posten`
  - ▶ Lager enthält keine doppelten Artikel:  
`einlagern :: Artikel -> Menge -> Lager -> Lager`

13 [35]

## Refakturierung im Einkaufsparadies III: Einkaufswagen

- ```
module Einkaufswagen(
  Einkaufswagen,
  leererWagen,
  einkauf,
  kasse,
  kassenbon
) where
```
- ▶ Implementiert ADT Einkaufswagen
 - ▶ Garantierte Invariante:
 - ▶ Korrekte Artikel und Menge im Einkaufswagen
`einkauf :: Artikel -> Menge -> Einkaufswagen -> Einkaufswagen`
 - ▶ Nutzt dazu Posten aus Modul Lager

14 [35]

Benutzung von ADTs

- ▶ **Operationen** und **Typen** müssen **importiert** werden
- ▶ Möglichkeiten des Imports:
 - ▶ **Alles** importieren
 - ▶ **Nur bestimmte** Operationen und Typen importieren
 - ▶ Bestimmte **Typen** und Operationen **nicht** importieren

15 [35]

Importe in Haskell

- ▶ Syntax:
`import [qualified] M [as N] [hiding] [(Bezeichner)]`
- ▶ **Bezeichner** geben an, **was** importiert werden soll:
 - ▶ Ohne Bezeichner wird **alles** importiert
 - ▶ Mit **hiding** werden Bezeichner **nicht** importiert
- ▶ Für jeden exportierten Bezeichner f aus M wird importiert
 - ▶ f und **qualifizierter** Bezeichner M.f
 - ▶ **qualified**: **nur qualifizierter** Bezeichner M.f
 - ▶ Umbenennung bei Import mit as (dann N.f)
 - ▶ Klasseninstanzen und Typsynonyme werden immer importiert
- ▶ Alle Importe stehen immer am **Anfang** des Moduls

16 [35]

Beispiel

module A(x,y) where...

Import(e)	Bekannte Bezeichner
import A	x, y, A.x, A.y
import A()	(nothing)
import A(x)	x, A.x
import qualified A	A.x, A.y
import qualified A()	(nothing)
import qualified A(x)	A.x
import A hiding ()	x, y, A.x, A.y
import A hiding (x)	y, A.y
import qualified A hiding ()	A.x, A.y
import qualified A hiding (x)	A.y
import A as B	x, y, B.x, B.y
import A as B(x)	x, B.x
import qualified A as B	B.x, B.y

Quelle: Haskell98-Report, Sect. 5.3.4

17 [35]

Schnittstelle vs. Implementation

- ▶ Gleiche **Schnittstelle** kann unterschiedliche **Implementationen** haben
- ▶ Beispiel: (endliche) Abbildungen

18 [35]

Endliche Abbildungen

- ▶ Eine Sichtweise: Ersatz für Hashtables in imperativen Sprachen. **Sehr nützlich!**
- ▶ Abstrakter Datentyp für **endliche Abbildungen**:
 - ▶ Datentyp

```
data Map α β
```

- ▶ Leere Abbildung:

```
empty :: Map α β
```

- ▶ Abbildung auslesen:

```
lookup :: Ord α => α -> Map α β -> Maybe β
```

- ▶ Abbildung ändern:

```
insert :: Ord α => α -> β -> Map α β -> Map α β
```

- ▶ Abbildung löschen:

```
delete :: Ord α => α -> Map α β -> Map α β
```

19 [35]

Eine naheliegende Implementation

- ▶ Modellierung als Haskell-Funktion:

```
data Map α β = Map (α -> Maybe β)
```

- ▶ Damit einfaches lookup, insert, delete:

```
empty = Map (λx -> Nothing)
```

```
lookup a (Map s) = s a
```

```
insert a b (Map s) =  
Map (λx -> if x == a then Just b else s x)
```

```
delete a (Map s) =  
Map (λx -> if x == a then Nothing else s x)
```

- ▶ Instanzen von Eq, Show **nicht möglich**
- ▶ **Speicherleck**

20 [35]

Endliche Abbildungen: Anwendungsbeispiel

- ▶ Artikel im Lager:

```
data Lager = Lager (M.Map Artikel Posten)
```

- ▶ Artikel suchen:

```
suche a (Lager l) = fmap menge (M.lookup a l)
```

- ▶ Ins Lager hinzufügen:

```
einlagern :: Artikel -> Menge -> Lager -> Lager  
einlagern a m (Lager l) =  
case posten a m of  
Nothing -> Lager l  
Just p -> Lager (M.insert a p l)
```

- ▶ Für Inventur fehlt Möglichkeit zur **Iteration**
- ▶ Daher: Map als **Assoziativliste**

21 [35]

Map als Assoziativliste

```
newtype Map α β = Map [(α, β)]
```

- ▶ Zusatzfunktionalität:

- ▶ Iteration (fold)

```
fold :: Ord α => ((α, β) -> γ -> γ) -> γ -> Map α β -> γ  
fold f e (Map ms) = foldr f e ms
```

- ▶ Instanzen von Eq und Show

```
instance (Eq α, Eq β) => Eq (Map α β) where  
Map s1 == Map s2 =  
null (s1 \\\ s2) && null (s1 \\\ s2)
```

- ▶ ... ist aber **ineffizient** (Zugriff/Löschen in $\mathcal{O}(n)$)
- ▶ Deshalb: balancierte Bäume

22 [35]

AVL-Bäume und Balancierte Bäume

AVL-Bäume

Ein Baum ist **ausgeglichen**, wenn

- ▶ alle Unterbäume ausgeglichen sind, und
- ▶ der Höhenunterschied zwischen zwei Unterbäumen höchstens eins beträgt.

Balancierte Bäume

Ein Baum ist **balanciert**, wenn

- ▶ alle Unterbäume balanciert sind, und
- ▶ für den linken und rechten Unterbaum l, r gilt:

$$size(l) \leq w \cdot size(r) \quad (1)$$

$$size(r) \leq w \cdot size(l) \quad (2)$$

w — **Gewichtung** (Parameter des Algorithmus)

23 [35]

Implementation von balancierten Bäumen

- ▶ Der Datentyp

```
data Tree α = Null  
| Node Weight (Tree α) α (Tree α)
```

- ▶ Gewichtung (Parameter des Algorithmus):

```
type Weight = Int
```

```
weight :: Weight
```

- ▶ Hilfskonstruktor, setzt Größe (l, r) balanciert)

```
node :: Tree α -> α -> Tree α -> Tree α  
node l n r = Node h l n r where  
h = 1 + size l + size r
```

- ▶ Hilfskonstruktor, balanciert ggf. neu aus:

```
mkNode :: Tree α -> α -> Tree α -> Tree α
```

24 [35]

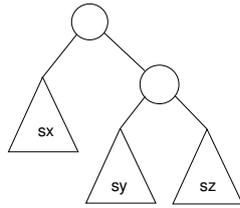
Balance sicherstellen

► Problem:

Nach Löschen oder Einfügen zu großes Ungewicht

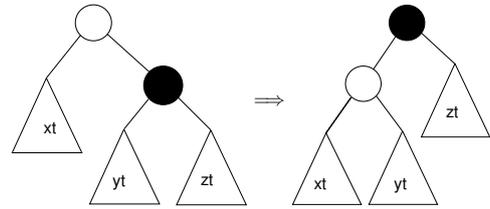
► Lösung:

Rotieren der Unterbäume



25 [35]

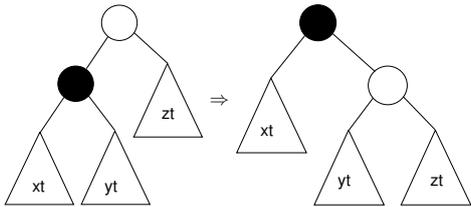
Linksrotation



```
rotl :: Tree α → Tree α
rotl (Node _ xt y (Node _ yt x zt)) =
  node (node xt y yt) x zt
```

26 [35]

Rechtsrotation



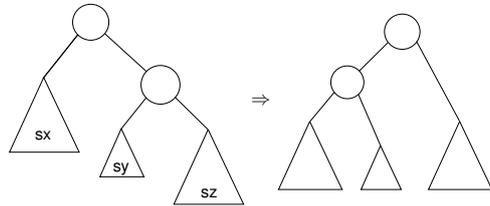
```
rotr :: Tree α → Tree α
rotr (Node _ (Node _ ut y vt) x rt) =
  node ut y (node vt x rt)
```

27 [35]

Balanciertheit sicherstellen

► Fall 1: Äußerer Unterbaum zu groß

► Lösung: Linksrotation

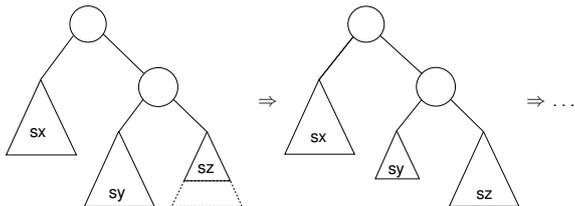


28 [35]

Balanciertheit sicherstellen

► Fall 2: Innerer Unterbaum zu groß oder gleich groß

► Reduktion auf vorherigen Fall durch Rechtsrotation des Unterbaumes



29 [35]

Balance sicherstellen

► Hilfsfunktion: Balance eines Baumes

```
bias :: Tree α → Ordering
bias Null = EQ
bias (Node _ lt _ rt) = compare (size lt) (size rt)
```

► Zu implementieren: mkNode lt y rt

- Voraussetzung: lt, rt balanciert
- Konstruiert neuen balancierten Baum mit Knoten y

► Fallunterscheidung:

- rt zu groß, zwei Unterfälle:
 - Linker Unterbaum von rt kleiner (Fall 1): bias rt == LT
 - Linker Unterbaum von rt größer/gleich groß (Fall 2): bias rt == EQ, bias rt == GT
- lt zu groß, zwei Unterfälle (symmetrisch).

30 [35]

Konstruktion eines ausgeglichenen Baumes

► Voraussetzung: lt, rt balanciert

```
mkNode lt x rt
| ls + rs < 2 = node lt x rt
| weight* ls < rs =
  if bias rt == LT then rotl (node lt x rt)
  else rotl (node lt x (rotr rt))
| ls > weight* rs =
  if bias lt == GT then rotr (node lt x rt)
  else rotr (node (rotl lt) x rt)
| otherwise = node lt x rt where
  ls = size lt; rs = size rt
```

31 [35]

Balancierte Bäume als Maps

► Endliche Abbildung: Bäume mit (key, value) Paaren

```
type Map α β = Tree (α, β)
```

► insert fügt neues Element ein:

```
insert :: Ord α ⇒ α → β → Map α β → Map α β
insert k v Null = node Null (k, v) Null
insert k v (Node n l a@(kn, _) r)
  | k < kn = mkNode (insert k v l) a r
  | k == kn = Node n l (k, v) r
  | k > kn = mkNode l a (insert k v r)
```

► lookup liest Element aus

► remove löscht ein Element

- Benötigt Hilfsfunktion join :: Tree α → Tree α → Tree α

32 [35]

Zusammenfassung Balancierte Bäume

- ▶ Auslesen, einfügen und löschen: logarithmischer Aufwand ($\mathcal{O}(\log n)$)
- ▶ Fold: linearer Aufwand ($\mathcal{O}(n)$)
- ▶ Guten durchschnittlichen Aufwand
- ▶ Auch in der Haskell-Bücherei: Data.Map (mit vielen weiteren Funktionen)

33 [35]

Defizite von Haskells Modulsystem

- ▶ Signatur ist nur **implizit**
 - ▶ Exportliste enthält nur Bezeichner
 - ▶ Wünschenswert: Signatur an der Exportliste annotierbar, oder Signaturen in separater Datei
 - ▶ In Java: **Interfaces**
- ▶ Keine **parametrisierten** Module
 - ▶ Vgl. Lager
 - ▶ In ML-Notation:

```
module Lager(Map : MapSig) : LagerSig =...
```

```
module Lager1 = Lager(MapList)
module Lager2 = Lager(MapFun)
```
 - ▶ In Java: **abstrakte** Klassen

34 [35]

ADTs vs. Objekte

- ▶ ADTs (Haskell): **Typ** plus **Operationen**
- ▶ Objekte (z.B. Java): **Interface**, **Methoden**.
- ▶ **Gemeinsamkeiten:**
 - ▶ Verkapselung (information hiding) der Implementation
- ▶ **Unterschiede:**
 - ▶ Objekte haben internen Zustand, ADTs sind referentiell transparent;
 - ▶ Objekte haben **Konstruktoren**, ADTs nicht (Konstruktoren nicht unterscheidbar)
 - ▶ Vererbungsstruktur auf Objekten (Verfeinerung für ADTs)
 - ▶ Java: **interface** eigenes Sprachkonstrukt
 - ▶ Java: **packages** für Sichtbarkeit

35 [35]

Zusammenfassung

- ▶ **Abstrakte Datentypen** (ADTs):
 - ▶ Besteht aus **Typen** und **Operationen** darauf
- ▶ Realisierung in Haskell durch **Module**
- ▶ Beispieldatentypen: endliche Abbildungen
- ▶ Nächste Vorlesung: ADTs durch **Eigenschaften** spezifizieren

36 [35]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 9 vom 09.12.2012: Signaturen und Eigenschaften

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2840

1 [25]

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
 - ▶ Abstrakte Datentypen
 - ▶ Signaturen und Eigenschaften
 - ▶ Spezifikation und Beweis
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

2 [25]

Abstrakte Datentypen und Signaturen

- ▶ Letzte Vorlesung: Abstrakte Datentypen
 - ▶ Typ plus Operationen
- ▶ Heute: Signaturen und Eigenschaften

Definition (Signatur)

Die **Signatur** eines abstrakten Datentyps besteht aus den Typen, und der Signatur der darüber definierten Funktionen.

- ▶ Keine direkte Repräsentation in Haskell
- ▶ Signatur: Typ eines Moduls

3 [25]

Endliche Abbildung: Signatur

- ▶ Adressen und Werte sind Parameter

```
data Map α β
```

- ▶ Leere Abbildung:

```
empty :: Map α β
```

- ▶ Abbildung auslesen:

```
lookup :: Ord α => α -> Map α β -> Maybe β
```

- ▶ Abbildung ändern:

```
insert :: Ord α => α -> β -> Map α β -> Map α β
```

- ▶ Abbildung löschen:

```
delete :: Ord α => α -> Map α β -> Map α β
```

4 [25]

Signatur und Eigenschaften

- ▶ Signatur genug, um ADT **typkorrekt** zu benutzen
 - ▶ Insbesondere Anwendbarkeit und Reihenfolge
- ▶ Signatur beschreibt nicht die **Bedeutung** (Semantik):
 - ▶ Was wird gelesen?
 - ▶ Wie verhält sich die Abbildung?
- ▶ Signatur ist **Sprache** (Syntax) um **Eigenschaften** zu beschreiben

5 [25]

Beschreibung von Eigenschaften

Definition (Axiome)

Axiome sind Prädikate über den Operationen der Signatur

- ▶ Elementare Prädikate P :
 - ▶ Gleichheit $s = t$
 - ▶ Ordnung $s < t$
 - ▶ Selbstdefinierte Prädikate
- ▶ Zusammengesetzte Prädikate
 - ▶ Negation $\text{not } p$
 - ▶ Konjunktion $p \ \&\& \ q$
 - ▶ Disjunktion $p \ || \ q$
 - ▶ Implikation $p \ \implies \ q$

6 [25]

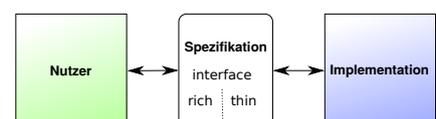
Beobachtbare und Abstrakte Typen

- ▶ **Beobachtbare** Typen: interne Struktur bekannt
 - ▶ Vordefinierte Typen (Zahlen, Zeichen), algebraische Datentypen (Listen)
 - ▶ Viele Eigenschaften und Prädikate bekannt
- ▶ **Abstrakte** Typen: interne Struktur unbekannt
 - ▶ Wenige Eigenschaften bekannt, Gleichheit nur wenn definiert
- ▶ Beispiel Map:
 - ▶ beobachtbar: Adressen und Werte
 - ▶ abstrakt: Speicher

7 [25]

Axiome als Interface

- ▶ Axiome müssen **gelten**
 - ▶ für alle Werte der freien Variablen zu True auswerten
- ▶ Axiome **spezifizieren**:
 - ▶ nach außen das **Verhalten**
 - ▶ nach innen die **Implementation**
- ▶ Signatur + Axiome = **Spezifikation**



8 [25]

Thin vs. Rich Interfaces

- ▶ Benutzersicht: **reiches** Interface
 - ▶ Viele Operationen und Eigenschaften
- ▶ Implementationsicht: **schlankes** Interface
 - ▶ Wenig Operation und Eigenschaften
- ▶ Beispiel Map:

▶ Rich interface:

```
insert :: Ord α => α → β → Map α β → Map α β
delete :: Ord α => α → Map α β → Map α β
```

▶ Thin interface:

```
put :: Ord α => α → Maybe β → Map α β → Map α β
```

▶ Thin-to-rich:

```
insert a v = put a (Just v)
```

```
delete a = put a Nothing
```

9 [25]

Axiome für Map

- ▶ Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:
 $\text{lookup } a \text{ empty} = \text{Nothing}$
- ▶ Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:
 $\text{lookup } a \text{ (put } a \ v \ s) = v$
- ▶ Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:
 $a \neq b \implies \text{lookup } a \text{ (put } b \ v \ s) = \text{lookup } a \ s$
- ▶ Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:
 $\text{put } a \ w \text{ (put } a \ v \ s) = \text{put } a \ w \ s$
- ▶ Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

```
a ≠ b ⇒ put a v (put b w s) =
      put b w (put a v s)
```

Thin: 5 Axiome
Rich: 13 Axiome

10 [25]

Axiome als Eigenschaften

- ▶ Axiome können **getestet** oder **bewiesen** werden
- ▶ Tests finden **Fehler**, Beweis zeigt **Korrektheit**

E. W. Dijkstra, 1972

Program testing can be used to show the presence of bugs, but never to show their absence.

▶ Arten von Tests:

- ▶ Unit tests (JUnit, HUnit)
- ▶ Black Box vs. White Box
- ▶ Coverage-based (z.B. path coverage, MC/DC)
- ▶ Zufallsbasiertes Testen

▶ Funktionale Programme eignen sich **sehr gut** zum Testen

11 [25]

Zufallsbasiertes Testen in Haskell

- ▶ Werkzeug: QuickCheck
- ▶ Zufällige Werte einsetzen, Auswertung auf True prüfen
- ▶ Polymorphe Variablen nicht testbar
 - ▶ Deshalb Typvariablen **instantiieren**
 - ▶ Typ muss genug Element haben (hier Map Int String)
 - ▶ Durch Signatur **Typinstanz** erzwingen
- ▶ **Freie Variablen** der Eigenschaft werden **Parameter** der Testfunktion

12 [25]

Axiome mit QuickCheck testen

▶ Für das Lesen:

```
prop_readEmpty :: Int → Bool
prop_readEmpty a =
  lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

```
prop_readPut :: Int → Maybe String →
  Map Int String → Bool
prop_readPut a v s =
  lookup a (put a v s) == v
```

▶ Eigenschaften als **Haskell-Prädikate**

▶ Es werden N Zufallswerte generiert und getestet ($N = 100$)

13 [25]

Axiome mit QuickCheck testen

▶ **Bedingte** Eigenschaften:

▶ $A \implies B$ mit A, B Eigenschaften

▶ Typ ist Property

▶ Es werden solange Zufallswerte generiert, bis N die Vorbedingung erfüllende gefunden und getestet wurden, andere werden ignoriert.

```
prop_readPutOther :: Int → Int → Maybe String →
  Map Int String → Property
prop_readPutOther a b v s =
  a ≠ b ⇒ lookup a (put b v s) == lookup a s
```

14 [25]

Axiome mit QuickCheck testen

▶ **Schreiben**:

```
prop_putPut :: Int → Maybe String → Maybe String →
  Map Int String → Bool
prop_putPut a v w s =
  put a w (put a v s) == put a w s
```

▶ **Schreiben** an anderer Stelle:

```
prop_putPutOther :: Int → Maybe String → Int →
  Maybe String → Map Int String →
  Property
prop_putPutOther a v b w s =
  a ≠ b ⇒ put a v (put b w s) ==
  put b w (put a v s)
```

▶ Test benötigt **Gleichheit** und **Zufallswerte** für Map a b

15 [25]

Zufallswerte selbst erzeugen

- ▶ Problem: **Zufällige** Werte von **selbstdefinierten** Datentypen
 - ▶ Gleichverteilung nicht immer erwünscht (e.g. $[\alpha]$)
 - ▶ Konstruktion nicht immer offensichtlich (e.g. Map)
- ▶ In QuickCheck:
 - ▶ Typklasse **class** Arbitrary α für Zufallswerte
 - ▶ Eigene **Instanziierung** kann Verteilung und Konstruktion berücksichtigen
 - ▶ E.g. Konstruktion einer Map:
 - ▶ Zufällige Länge, dann aus sovielen zufälligen Werten Map konstruieren
 - ▶ Zufallswerte in Haskell?

16 [25]

Signatur und Semantik

Stacks

Typ: $St\ \alpha$

Initialwert:

$empty :: St\ \alpha$

Wert ein/auslesen:

$push :: \alpha \rightarrow St\ \alpha \rightarrow St\ \alpha$

$top :: St\ \alpha \rightarrow \alpha$

$pop :: St\ \alpha \rightarrow St\ \alpha$

Last in first out (LIFO).

Queues

Typ: $Qu\ \alpha$

Initialwert:

$empty :: Qu\ \alpha$

Wert ein/auslesen:

$enq :: \alpha \rightarrow Qu\ \alpha \rightarrow Qu\ \alpha$

$first :: Qu\ \alpha \rightarrow \alpha$

$deq :: Qu\ \alpha \rightarrow Qu\ \alpha$

First in first out (FIFO)

Gleiche Signatur, unterschiedliche Semantik.

17 [25]

Eigenschaften von Stack

► Last in first out (LIFO):

$top\ (push\ a\ s) == a$

$pop\ (push\ a\ s) == s$

$push\ a\ s \neq empty$

18 [25]

Eigenschaften von Queue

► First in first out (FIFO):

$first\ (enq\ a\ empty) == a$

$q \neq empty \implies first\ (enq\ a\ q) == first\ q$

$deq\ (enq\ a\ empty) == empty$

$q \neq empty \implies deq\ (enq\ a\ q) == enq\ a\ (deq\ q)$

$enq\ a\ q \neq empty$

19 [25]

Implementation von Stack: Liste

Sehr einfach: ein Stack ist eine Liste

newtype $St\ \alpha = St\ [\alpha]$ **deriving** (Show, Eq)

$empty = St\ []$

$push\ a\ (St\ s) = St\ (a:s)$

$top\ (St\ []) = error\ "St::top_on_empty_stack"$

$top\ (St\ s) = head\ s$

$pop\ (St\ []) = error\ "St::pop_on_empty_stack"$

$pop\ (St\ s) = St\ (tail\ s)$

20 [25]

Implementation von Queue

► Mit einer Liste?

► Problem: am Ende anfügen oder abnehmen ist teuer.

► Deshalb **zwei** Listen:

► Erste Liste: zu entnehmende Elemente

► Zweite Liste: hinzugefügte Elemente **rückwärts**

► Invariante: erste Liste leer gdw. Queue leer

21 [25]

Repräsentation von Queue

Operation	Resultat	Queue	Repräsentation
empty			$([], [])$
enq 9		9	$([9], [])$
enq 4		4 → 9	$([9], [4])$
enq 7		7 → 4 → 9	$([9], [7, 4])$
deq	9	7 → 4	$([4, 7], [])$
enq 5		5 → 7 → 4	$([4, 7], [5])$
enq 3		3 → 5 → 7 → 4	$([4, 7], [3, 5])$
deq	4	3 → 5 → 7	$([7], [3, 5])$
deq	7	3 → 5	$([5, 3], [])$
deq	5	3	$([3], [])$
deq	3		$([], [])$
deq	error		$([], [])$

22 [25]

Implementation

► Datentyp:

data $Qu\ \alpha = Qu\ [\alpha]\ [\alpha]$

► Leere Schlange: alles leer

$empty = Qu\ []\ []$

► Erstes Element steht vorne in erster Liste

$first :: Qu\ \alpha \rightarrow \alpha$

$first\ (Qu\ []\ _) = error\ "Queue::first_of_empty_Q"$

$first\ (Qu\ (x:xs)\ _) = x$

► Gleichheit:

instance $Eq\ \alpha \implies Eq\ (Qu\ \alpha)$ **where**

$Qu\ xs1\ ys1 == Qu\ xs2\ ys2 =$

$xs1 ++ reverse\ ys1 == xs2 ++ reverse\ ys2$

23 [25]

Implementation

► Bei enq und deq Invariante prüfen

$enq\ x\ (Qu\ xs\ ys) = check\ xs\ (x:ys)$

$deq\ (Qu\ []\ _) = error\ "Queue::deq_of_empty_Q"$

$deq\ (Qu\ (x:xs)\ ys) = check\ xs\ ys$

► Prüfung der Invariante **nach** dem Einfügen und Entnehmen

► check **garantiert** Invariante

$check :: [\alpha] \rightarrow [\alpha] \rightarrow Qu\ \alpha$

$check\ []\ ys = Qu\ (reverse\ ys)\ []$

$check\ xs\ ys = Qu\ xs\ ys$

24 [25]

Zusammenfassung

- ▶ **Signatur**: Typ und Operationen eines ADT
- ▶ **Axiome**: über Typen formulierte **Eigenschaften**
- ▶ **Spezifikation** = Signatur + Axiome
 - ▶ **Interface** zwischen Implementierung und Nutzung
 - ▶ **Testen** zur Erhöhung der Konfidenz und zum Fehlerfinden
 - ▶ **Beweisen** der Korrektheit
- ▶ **QuickCheck**:
 - ▶ Freie Variablen der Eigenschaften werden **Parameter** der Testfunktion
 - ▶ \Rightarrow für **bedingte** Eigenschaften

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 10 vom 18.12.2012: Spezifikation und Beweis

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
 - ▶ Abstrakte Datentypen
 - ▶ Signaturen und Eigenschaften
 - ▶ Spezifikation und Beweis
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Formaler Beweis

- ▶ Warum?
 - ▶ Formaler Beweis zeigt Korrektheit
- ▶ Wie?
 - ▶ Formale Notation
 - ▶ Beweisformen (Schließregeln)
- ▶ Wozu?
 - ▶ Formaler Beweis zur Analyse des Algorithmus
 - ▶ Haskell als Modellierungssprache

Eigenschaften

- ▶ Prädikate:
 - ▶ Haskell-Ausdrücke vom Typ Bool
 - ▶ Quantifizierte Aussagen:
Wenn $P :: \alpha \rightarrow \text{Bool}$, dann ist $\text{ALL } x. P \ x :: \text{Bool}$ ein Prädikat und $\text{EX } x. P \ x :: \text{Bool}$ ein Prädikat
- ▶ Sonderfall Gleichungen $s == t$ und transitive Relationen
- ▶ Prädikate müssen nicht ausführbar sein

Wie beweisen?

- | | | |
|---|--------------------------|-------------------------------|
| ▶ | Beweis \leftrightarrow | Programmdefinition |
| | Gleichungsumformung | Funktionsdefinition |
| | Fallunterscheidung | Fallunterscheidung (Guards) |
| | Induktion | Rekursive Funktionsdefinition |
- ▶ Wichtig: formale Notation

Notation

Allgemeine Form:	Sonderfall Gleichungen:
Lemma (1) P	Lemma (2) a = b
$\Leftrightarrow P_1$ — Begründung	a
$\Leftrightarrow P_2$ — Begründung	= x_1 — Begründung
$\Leftrightarrow \dots$	= x_2 — Begründung
$\Leftrightarrow \text{True}$	= \dots
	= b
	□

Beweis durch vollständige Induktion

Zu zeigen: Für alle natürlichen Zahlen x gilt $P(x)$.

Beweis:

- ▶ Induktionsbasis: $P(0)$
- ▶ Induktionsschritt:
 - ▶ Induktionsvoraussetzung $P(x)$
 - ▶ zu zeigen $P(x + 1)$

Beweis durch strukturelle Induktion (Listen)

Zu zeigen:

Für alle endlichen Listen xs gilt $P \ xs$

Beweis:

- ▶ Induktionsbasis: $P \ []$
- ▶ Induktionsschritt:
 - ▶ Induktionsvoraussetzung $P \ xs$
 - ▶ zu zeigen $P \ (x::xs)$

Beweis durch strukturelle Induktion (Allgemein)

Zu zeigen:

Für alle x in T gilt $P(x)$

Beweis:

- ▶ Für jeden Konstruktor C_j :
 - ▶ Voraussetzung: für alle $t_{i,j}$ gilt $P(t_{i,j})$
 - ▶ zu zeigen $P(C_j t_{i,1} \dots t_{i,k})$

9 [11]

Beweisstrategien

- ▶ Fold-Unfold:
 - ▶ Im Induktionsschritt Funktionsdefinition **auffalten**
 - ▶ Ausdruck umformen, bis Induktionsvoraussetzung anwendbar
 - ▶ Funktionsdefinitionen **zusammenfalten**
- ▶ Induktionsvoraussetzung **stärken**:
 - ▶ Stärkere Behauptung \implies stärkere Induktionsvoraussetzung, daher:
 - ▶ um Behauptung P zu zeigen, stärkere Behauptung P' zeigen, dann P als Korollar

10 [11]

Zusammenfassung

- ▶ Beweise beruhen auf:
 - ▶ Gleichungs- und Äquivalenzumformung
 - ▶ Fallunterscheidung
 - ▶ Induktion
- ▶ Beweisstrategien:
 - ▶ Sinnvolle Lemmata
 - ▶ Fold/Unfold
 - ▶ Induktionsvoraussetzung stärken
- ▶ Warum Beweisen?
 - ▶ Korrektheit von Haskell-Programmen
 - ▶ Haskell als **Modellierungssprache**

Frohes Fest!



11 [11]

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Frohes Neues Jahr!

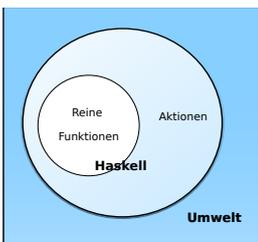
Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben
 - ▶ Aktionen und Zustände
 - ▶ Effizienzaspekte
 - ▶ Scala — Eine praktische Einführung
 - ▶ Rückblick & Ausblick

Inhalt

- ▶ Ein/Ausgabe in funktionale Sprachen
- ▶ Wo ist das Problem?
- ▶ Aktionen und der Datentyp *IO*.
- ▶ Aktionen als Werte
- ▶ Aktionen als Zustandstransformationen

Ein- und Ausgabe in funktionalen Sprachen



Problem:

- ▶ Funktionen mit Seiteneffekten nicht referentiell transparent.
- ▶ `readString :: ... -> String ??`

Lösung:

- ▶ Seiteneffekte am Typ erkennbar
- ▶ Aktionen können nur mit Aktionen komponiert werden
- ▶ „einmal Aktion, immer Aktion“

Aktionen als abstrakter Datentyp

- ▶ ADT mit Operationen Komposition und Lifting
- ▶ Signatur:

```
type IO α
(≫)  :: IO α -> (α -> IO β) -> IO β
return :: α -> IO α
```
- ▶ Plus elementare Operationen (lesen, schreiben etc)

Elementare Aktionen

- ▶ Zeile von stdin lesen:

```
getLine :: IO String
```

- ▶ Zeichenkette auf stdout ausgeben:

```
putStr  :: String -> IO ()
```

- ▶ Zeichenkette mit Zeilenvorschub ausgeben:

```
putStrLn :: String -> IO ()
```

Einfache Beispiele

- ▶ Echo einfach

```
echo1 :: IO ()
echo1 = getLine ≫= putStrLn
```

- ▶ Echo mehrfach

```
echo :: IO ()
echo = getLine ≫= putStrLn ≫= λ_ -> echo
```

- ▶ Was passiert hier?

- ▶ Verknüpfen von Aktionen mit `≫=`
- ▶ Jede Aktion gibt Wert zurück

Noch ein Beispiel

- ▶ Umgekehrtes Echo:

```
ohce :: IO ()
ohce = getLine
      >>= \s → putStrLn (reverse s)
      >> ohce
```

- ▶ Was passiert hier?

- ▶ **Reine** Funktion reverse wird innerhalb von **Aktion** putStrLn genutzt
- ▶ Folgeaktion ohce benötigt **Wert** der vorherigen Aktion nicht
- ▶ Abkürzung: >>

```
p >> q = p >>= \_ → q
```

9 [28]

Die do-Notation

- ▶ Syntaktischer Zucker für IO:

```
echo =
  getLine
  >>= \s → putStrLn s
  >> echo
  ⇔
  do s ← getLine
    putStrLn s
    echo
```

- ▶ Rechts sind >>=, >> implizit.
- ▶ Es gilt die **Abseitsregel**.
- ▶ Einrückung der ersten Anweisung nach **do** bestimmt Abseits.

10 [28]

Drittes Beispiel

- ▶ Zählendes, endliches Echo

```
echo3 :: Int → IO ()
echo3 cnt = do
  putStr (show cnt ++ ": ")
  s ← getLine
  if s ≠ "" then do
    putStrLn $ show cnt ++ ": " ++ s
    echo3 (cnt+1)
  else return ()
```

- ▶ Was passiert hier?

- ▶ Kombination aus Kontrollstrukturen und Aktionen
- ▶ **Aktionen** als **Werte**
- ▶ Geschachtelte **do**-Notation

11 [28]

Module in der Standardbibliothek

- ▶ Ein/Ausgabe, Fehlerbehandlung (Modul System.IO)
- ▶ Zufallszahlen (Modul System.Random)
- ▶ Kommandozeile, Umgebungsvariablen (Modul System.Environment)
- ▶ Zugriff auf das Dateisystem (Modul System.Directory)
- ▶ Zeit (Modul System.Time)

12 [28]

Ein/Ausgabe mit Dateien

- ▶ Im Prelude vordefiniert:

- ▶ Dateien schreiben (überschreiben, anhängen):

```
type FilePath = String
writeFile :: FilePath → String → IO ()
appendFile :: FilePath → String → IO ()
```

- ▶ Datei lesen (verzögert):

```
readFile :: FilePath → IO String
```

- ▶ Mehr Operationen im Modul IO der Standardbibliothek

- ▶ Buffered/Unbuffered, Seeking, &c.
- ▶ Operationen auf Handle

13 [28]

Beispiel: Zeichen, Wörter, Zeilen zählen (wc)

```
wc :: String → IO ()
wc file =
  do cont ← readFile file
     putStrLn $ file ++ ": " ++
       show (length (lines cont),
            length (words cont),
            length cont)
```

- ▶ Datei wird gelesen
- ▶ Anzahl Zeichen, Worte, Zeilen gezählt
- ▶ Erstaunlich (hinreichend) effizient

14 [28]

Aktionen als Werte

- ▶ **Aktionen** sind **Werte** wie alle anderen.
- ▶ Dadurch **Definition** von **Kontrollstrukturen** möglich.
- ▶ Endlosschleife:

```
forever :: IO α → IO α
forever a = a >> forever a
```

- ▶ Iteration (feste Anzahl):

```
forN :: Int → IO α → IO ()
forN n a | n == 0 = return ()
         | otherwise = a >> forN (n-1) a
```

- ▶ Vordefinierte Kontrollstrukturen (Control.Monad):

- ▶ when, mapM, forM, sequence, ...

15 [28]

Fehlerbehandlung

- ▶ **Fehler** werden durch Exception repräsentiert
 - ▶ Exception ist **Typklasse** — kann durch eigene Instanzen erweitert werden
 - ▶ Vordefinierte Instanzen: u.a. IOError

- ▶ Fehlerbehandlung durch **Ausnahmen** (ähnlich Java)

```
catch :: Exception e → IO α → (e → IO α) → IO α
try :: Exception e → IO α → IO (Either e a)
```

- ▶ Faustregel: catch für unerwartete Ausnahmen, try für erwartete
- ▶ Fehlerbehandlung **nur in Aktionen**

16 [28]

Fehler fangen und behandeln

- ▶ Fehlerbehandlung für wc:

```
wc2 :: String → IO ()
wc2 file =
  catch (wc file)
    (\e → putStrLn $ "Fehler:␣" ++ show (e :: IOException))
```

- ▶ IOError kann analysiert werden (siehe System.IO.Error)
- ▶ read mit Ausnahme bei Fehler (statt Programmabbruch):

```
readIO :: Read a ⇒ String → IO a
```

17 [28]

Ausführbare Programme

- ▶ Eigenständiges Programm ist **Aktion**
- ▶ **Hauptaktion**: main :: IO () in Modul Main
- ▶ wc als eigenständiges Programm:

```
module Main where

import System.Environment (getArgs)
import Control.Exception

...

main :: IO ()
main = do
  args ← getArgs
  mapM_ wc2 args
```

18 [28]

So ein Zufall!

- ▶ Zufallswerte:

```
randomRIO :: (α, α) → IO α
```

- ▶ Warum ist randomIO **Aktion**?
- ▶ **Beispiele**:

- ▶ Aktion zufällig oft ausführen:

```
atmost :: Int → IO α → IO [α]
atmost most a =
  do l ← randomRIO (1, most)
     sequence (replicate l a)
```

- ▶ Zufälliges Element aus einer nicht-leeren Liste auswählen:

```
pickRandom :: [α] → IO α
pickRandom [] = error "pickRandom:␣empty␣list"
pickRandom xs = do
  i ← randomRIO (0, length xs - 1)
  return $ xs !! i
```

19 [28]

Fallbeispiel: Wörter raten

- ▶ Unterhaltungsprogramm: der Benutzer rät Wörter
- ▶ Benutzer kann einzelne Buchstaben eingeben oder das ganze Wort
- ▶ Wort wird maskiert ausgegeben, nur geratene Buchstaben angezeigt

20 [28]

Wörter raten: Programmstruktur

- ▶ Hauptschleife:

```
play :: String → String → String → IO ()
```

- ▶ Argumente: Geheimnis, geratene Buchstaben (enthalten, nicht enthalten)
- ▶ Benutzereingabe:

```
getGuess :: String → String → IO String
```

- ▶ Argumente: geratene Zeichen (im Geheimnis enthalten, nicht enthalten)
- ▶ Hauptfunktion:

```
main :: IO ()
```

- ▶ Liest ein Lexikon, wählt Geheimnis aus, ruft Hauptschleife auf

21 [28]

Funktionen mit Zustand

Theorem (Currying)

Folgende Typen sind *isomorph*:

$$A \times B \rightarrow C \cong A \rightarrow B \rightarrow C$$

- ▶ In Haskell: folgende Funktionen sind *invers*:

```
curry :: ((α, β) → γ) → α → β → γ
uncurry :: (α → β → γ) → (α, β) → γ
```

22 [28]

Funktionen mit Zustand

- ▶ Idee: Seiteneffekt **explizit** machen
- ▶ Funktion $f : A \rightarrow B$ mit Seiteneffekt in **Zustand** S :

$$\begin{aligned} f : A \times S &\rightarrow B \times S \\ &\cong \\ f : A &\rightarrow S \rightarrow B \times S \end{aligned}$$

- ▶ Datentyp: $S \rightarrow B \times S$
- ▶ Komposition: Funktionskomposition und uncurry

23 [28]

In Haskell: Zustände **explizit**

- ▶ Datentyp: Berechnung mit Seiteneffekt in Typ σ (polymorph über α)
- ```
type State σ α = σ → (α, σ)
```

- ▶ Komposition zweier solcher Berechnungen:

```
comp :: State σ α → (α → State σ β) → State σ β
comp f g = uncurry g ∘ f
```

- ▶ Lifting:

```
lift :: α → State σ α
lift = curry id
```

24 [28]

## Beispiel: Ein Zähler

- ▶ Datentyp:

```
type WithCounter α = State Int α
```

- ▶ Zähler erhöhen:

```
tick :: WithCounter ()
tick i = ((), i+1)
```

- ▶ Zähler auslesen:

```
read :: WithCounter Int
read i = (i, i)
```

- ▶ Zähler zurücksetzen:

```
reset :: WithCounter ()
reset i = ((), 0)
```

25 [28]

## Implizite vs. explizite Zustände

- ▶ Nachteil: Zustand ist **explizit**
  - ▶ Kann dupliziert werden
- ▶ Daher: Zustand **implizit** machen
  - ▶ Datentyp verkapseln
  - ▶ Signatur `State`, `comp`, `lift`, elementare Operationen

26 [28]

## Aktionen als Zustandstransformationen

- ▶ **Idee**: Aktionen sind **Transformationen** auf Systemzustand  $S$
- ▶  $S$  beinhaltet
  - ▶ Speicher als Abbildung  $A \rightarrow V$  (Adressen  $A$ , Werte  $V$ )
  - ▶ Zustand des Dateisystems
  - ▶ Zustand des Zufallsgenerators
- ▶ In Haskell: Typ `RealWorld`
  - ▶ "Virtueller" Typ, Zugriff nur über elementare Operationen
  - ▶ Entscheidend nur **Reihenfolge** der Aktionen

27 [28]

## Zusammenfassung

- ▶ Ein/Ausgabe in Haskell durch **Aktionen**
- ▶ **Aktionen** (Typ `IO α`) sind seiteneffektbehaftete Funktionen
- ▶ **Komposition** von Aktionen durch

```
(>>=) :: IO α -> (α -> IO β) -> IO β
return :: α -> IO α
```
- ▶ **do**-Notation
- ▶ Fehlerbehandlung durch Ausnahmen (`IOError`, `catch`).
- ▶ Verschiedene Funktionen der Standardbücherei:
  - ▶ Prelude: `getLine`, `putStr`, `putStrLn`, `readFile`, `writeFile`
  - ▶ Module: `IO`, `Random`
- ▶ Aktionen sind **implementiert** als **Zustandstransformationen**

28 [28]

## Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung Vorlesung 12 vom 13.01.2015: Effizienzaspekte

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2873

1 [32]

## Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ **Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben**
  - ▶ Aktionen und Zustände
  - ▶ **Effizienzaspekte**
  - ▶ Scala — Eine praktische Einführung
  - ▶ Rückblick & Ausblick

2 [32]

## Organisatorisches

- ▶ Fachgespräche: 2/3. Februar oder 9/10. Februar?
- ▶ Zusatztermin: 27. Februar

3 [32]

## Inhalt

- ▶ **Zeitbedarf:** Endrekursion — while in Haskell
- ▶ **Platzbedarf:** Speicherlecks
- ▶ “Unendliche” Datenstrukturen
- ▶ Verschiedene andere Performancefallen:
  - ▶ Überladene Funktionen, Listen
- ▶ “Usual Disclaimers Apply”:
  - ▶ Erste Lösung: bessere **Algorithmen**
  - ▶ Zweite Lösung: **Büchereien** nutzen

4 [32]

## Effizienzaspekte

- ▶ Zur Verbesserung der Effizienz:
  - ▶ Analyse der **Auswertungsstrategie**
  - ▶ ... und des **Speichermanagement**
- ▶ Der ewige Konflikt: **Geschwindigkeit vs. Platz**
- ▶ Effizienzverbesserungen durch
  - ▶ **Endrekursion:** Iteration in funktionalen Sprachen
  - ▶ **Striktheit:** Speicherlecks vermeiden (bei verzögerter Auswertung)
- ▶ Vorteil: Effizienz **muss nicht** im Vordergrund stehen

5 [32]

## Endrekursion

### Definition (Endrekursion)

Eine Funktion ist **endrekursiv**, wenn

- (i) es genau **einen** rekursiven Aufruf gibt,
- (ii) der **nicht** innerhalb eines **geschachtelten Ausdrucks** steht.

- ▶ D.h. darüber **nur Fallunterscheidungen: case oder if**
- ▶ Entspricht **goto** oder **while** in imperativen Sprachen.
- ▶ Wird in **Sprung** oder **Schleife** übersetzt.
- ▶ Braucht **keinen Platz** auf dem Stack.

6 [32]

## Einfaches Beispiel

- ▶ In Haskell:

```
even x = if x < 1 then x == 0 else even (x-2)
```
- ▶ Übersetzt nach C:

```
int even (int x)
{ if (x < 1) return x == 0;
 else return (even (x-2)); }
```
- ▶ Äquivalente Formulierung:

```
int even (int x)
{ if (!(x < 1)) { x -= 2; return even(x); }
 else return x == 0; }
```
- ▶ Iterative Variante mit Schleife:

```
int even (int x)
{ while (!(x < 1)) x -= 2;
 return x == 0; }
```

7 [32]

## Beispiel: Fakultät

- ▶ **fac1 nicht** endrekursiv:

```
fac1 :: Integer -> Integer
fac1 n = if n == 0 then 1 else n * fac1 (n-1)
```
- ▶ **fac2** endrekursiv:

```
fac2 :: Integer -> Integer
fac2 n = fac' n 1 where
 fac' :: Integer -> Integer -> Integer
 fac' n acc = if n == 0 then acc
 else fac' (n-1) (n*acc)
```
- ▶ **fac1** verbraucht Stack, **fac2** nicht.
- ▶ Ist nicht merklich schneller?!

8 [32]

## Beispiel: Listen umdrehen

- ▶ Liste umdrehen, **nicht** endrekursiv:

```
rev' :: [a] -> [a]
rev' [] = []
rev' (x:xs) = rev' xs ++ [x]
```

- ▶ Hängt auch noch hinten an —  $O(n^2)$ !

- ▶ Liste umdrehen, **endrekursiv** und  $O(n)$ :

```
rev :: [a] -> [a]
rev xs = rev0 xs [] where
 rev0 [] ys = ys
 rev0 (x:xs) ys = rev0 xs (x:ys)
```

- ▶ Beispiel: last (rev [1..10000])

- ▶ **Schneller** — warum?

9 [32]

## Verzögerte Auswertung und Speicherlecks

- ▶ **Garbage collection** gibt unbenutzten Speicher wieder frei.

- ▶ Unbenutzt: Bezeichner nicht mehr im erreichbar

- ▶ Verzögerte Auswertung **effizient**, weil nur bei Bedarf ausgewertet wird

- ▶ Aber Achtung: **Speicherlecks!**

- ▶ Eine Funktion hat ein **Speicherleck**, wenn Speicher **unnötig** lange im Zugriff bleibt.

- ▶ "Echte" Speicherlecks wie in C/C++ nicht möglich.

- ▶ Beispiel: fac2

- ▶ Zwischenergebnisse werden **nicht** ausgewertet.

- ▶ Insbesondere ärgerlich bei **nicht-terminierenden** Funktionen.

10 [32]

## Striktheit

- ▶ **Strikte Argumente** erlauben Auswertung **vor** Aufruf

- ▶ Dadurch konstanter Platz bei Endrekursion.

- ▶ **Erzwungene Striktheit**: seq ::  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$

```
⊥ 'seq' b = ⊥
a 'seq' b = b
```

- ▶ seq vordefiniert (nicht in Haskell definierbar)

- ▶ (\$) :: (a -> b) -> a -> b strikte Funktionsanwendung

```
f $! x = x 'seq' f x
```

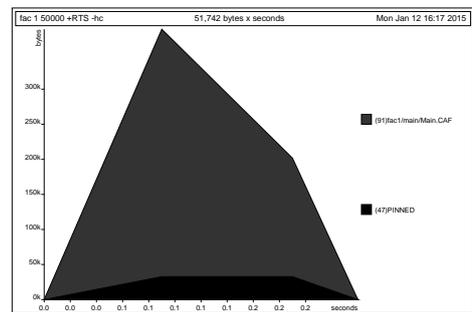
- ▶ ghc macht Striktheitsanalyse

- ▶ Fakultät in konstantem Platzaufwand

```
fac3 :: Integer -> Integer
fac3 n = fac' n 1 where
 fac' n acc = seq acc $ if n == 0 then acc
 else fac' (n-1) (n*acc)
```

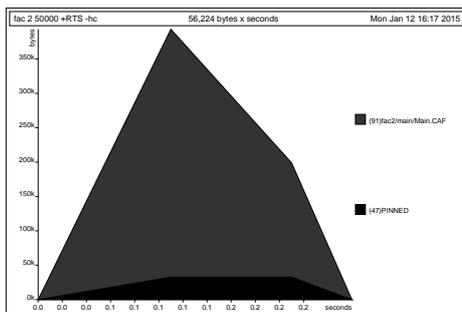
11 [32]

## Speicherprofil: fac1 50000, nicht optimiert



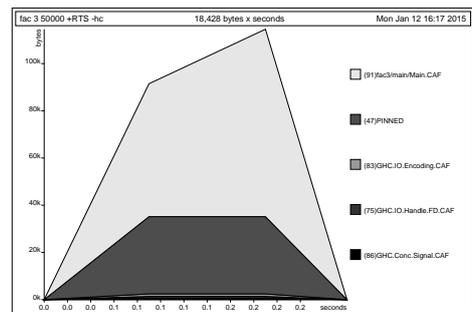
12 [32]

## Speicherprofil: fac2 50000, nicht optimiert



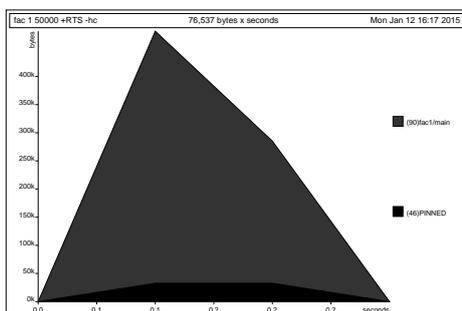
13 [32]

## Speicherprofil: fac3 50000, nicht optimiert



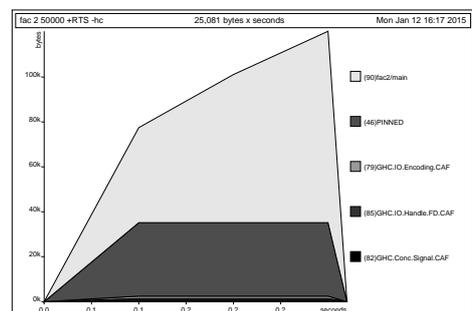
14 [32]

## Speicherprofil: fac1 50000, optimiert



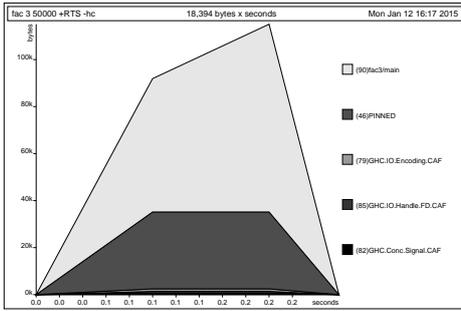
15 [32]

## Speicherprofil: fac2 50000, optimiert



16 [32]

## Speicherprofil: fac3 50000, optimiert



17 [32]

## Fazit Speicherprofile

- ▶ Endrekursion **nur** bei **strikten Funktionen** schneller
- ▶ Optimierung des *ghc*
  - ▶ Meist **ausreichend** für Striktheitsanalyse
  - ▶ Aber **nicht** für Endrekursion
- ▶ Deshalb:
  - ▶ **Manuelle Überführung** in Endrekursion **sinnvoll**
  - ▶ **Compiler-Optimierung** für Striktheit nutzen

18 [32]

## Überführung in Endrekursion

- ▶ Gegeben Funktion

$$f' : S \rightarrow T$$

$$f' x = \text{if } B x \text{ then } H x$$

$$\text{else } \phi (f' (K x)) (E x)$$

- ▶ Mit  $K : S \rightarrow S, \phi : T \rightarrow T \rightarrow T, E : S \rightarrow T, H : S \rightarrow T$ .

- ▶ Voraussetzung:  $\phi$  assoziativ,  $e : T$  neutrales Element

- ▶ Dann ist **endrekursive** Form:

$$f : S \rightarrow T$$

$$f x = g x e \text{ where}$$

$$g x y = \text{if } B x \text{ then } \phi (H x) y$$

$$\text{else } g (K x) (\phi (E x) y)$$

19 [32]

## Beispiel

- ▶ Länge einer Liste (nicht-endrekursiv)

```
length' :: [a] -> Int
length' xs = if null xs then 0
 else 1 + length' (tail xs)
```

- ▶ Zuordnung der Variablen:

$$K(x) \mapsto \text{tail } x \quad B(x) \mapsto \text{null } x$$

$$E(x) \mapsto 1 \quad H(x) \mapsto 0$$

$$\phi(x, y) \mapsto x + y \quad e \mapsto 0$$

- ▶ Es gilt:  $\phi(x, e) = x + 0 = x$  ( $0$  neutrales Element)

20 [32]

## Beispiel

- ▶ Damit **endrekursive** Variante:

```
length :: [a] -> Int
length xs = len xs 0 where
 len xs y = if null xs then y -- was: y+0
 else len (tail xs) (1+ y)
```

- ▶ Allgemeines **Muster**:

- ▶ Monoid  $(\phi, e)$ :  $\phi$  assoziativ,  $e$  neutrales Element.
- ▶ Zusätzlicher Parameter **akkumuliert** Resultat.

21 [32]

## Weiteres Beispiel: foldr vs. foldl

- ▶ foldr ist **nicht endrekursiv**:

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f z [] = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

- ▶ foldl ist **endrekursiv**:

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f z [] = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

- ▶ foldl' ist **strikt und endrekursiv**:

```
foldl' :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl' f a [] = a
foldl' f a (x:xs) =
 let a' = f a x in a' 'seq' foldl' f a' xs
```

- ▶ Für Monoid  $(\phi, e)$  gilt:  $\text{foldr } \phi e l = \text{foldl } (\text{flip } \phi) e l$

22 [32]

## Wann welches fold?

- ▶ foldl **endrekursiv**, aber traversiert immer die **ganze** Liste.

- ▶ foldl' ferner strikt und konstanter Platzaufwand

- ▶ Wann welches fold?

- ▶ Strikte Funktionen mit foldl' falten:

```
rev2 :: [a] -> [a]
rev2 = foldl' (flip (:)) []
```

- ▶ Wenn nicht die **ganze** Liste benötigt wird, mit foldr falten:

```
all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
all p = foldr ((&&) o p) True
```

- ▶ Potenziell **unendliche** Listen **immer** mit foldr falten.

23 [32]

## Endrekursive Aktionen

- ▶ **Nicht endrekursiv**:

```
getLines' :: IO String
getLines' = do str <- getLine
 if null str then return ""
 else do rest <- getLines'
 return (str ++ rest)
```

- ▶ **Endrekursiv**:

```
getLines :: IO String
getLines = getit "" where
 getit res = do str <- getLine
 if null str then return res
 else getit (res ++ str)
```

24 [32]

## Fortgeschrittene Endrekursion

- ▶ **Akkumulation** von Ergebniswerten durch partiell applizierte Funktionen
- ▶ Sonderfall von **Continuations**: es wird nicht das Ergebnis zurückgegeben, sondern eine Funktion, welche das Ergebnis erhält
- ▶ Beispiel: die Klasse **Show**
- ▶ Nur Methode **show** wäre zu langsam ( $O(n^2)$ ):

```
class Show a where
 show :: a -> String
```
- ▶ Deshalb zusätzlich

```
showsPrec :: Int -> a -> String -> String
show x = showsPrec 0 x ""
```
- ▶ **String** wird erst aufgebaut, wenn er ausgewertet wird ( $O(n)$ ).

25 [32]

## Beispiel: Mengen als Listen

```
data Set a = Set [a]
```

Zu langsam wäre

```
instance Show a => Show (Set a) where
 show (Set elems) =
 "{" ++ intercalate ", " (map show elems) ++ "}"
```

Deshalb besser

```
instance Show a => Show (Set a) where
 showsPrec i (Set elems) = showElems elems where
 showElems [] = ("{} " ++)
 showElems (x:xs) = ('{' :) . shows x . showl xs
 where showl [] = (' ' :)
 showl (x:xs) = (',' :) . shows x . showl xs
```

26 [32]

## Effizienz durch "unendliche" Datenstrukturen

- ▶ Listen müssen nicht **endlich repräsentierbar** sein:
  - ▶ Nützlich für Listen mit unbekannter Länge
  - ▶ Allerdings Induktion nur für endliche Listen gültig.
- ▶ Beispiel: Fibonacci-Zahlen
- ▶ Aus der Kaninchenzucht.
- ▶ Sollte jeder Informatiker kennen.

```
fib' :: Int -> Integer
fib' 0 = 1
fib' 1 = 1
fib' n = fib' (n-1) + fib' (n-2)
```
- ▶ Problem: **baumartige** Rekursion, **exponentieller** Aufwand.

27 [32]

## Fibonacci-Zahlen als Strom

- ▶ Lösung: zuvor berechnete **Teilergebnisse** wiederverwenden.

- ▶ Sei **fibs** :: [Integer] Strom aller Fibonaccizahlen:

```
fibs 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55
tail fibs 1 2 3 5 8 13 21 34 55
tail (tail fibs) 2 3 5 8 13 21 34 55
```

- ▶ Damit ergibt sich:

```
fibs :: [Integer]
fibs = 1 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

- ▶ **n-te** Fibonaccizahl mit **fibs !! n**
- ▶ Aufwand: **linear**, da **fibs** nur einmal ausgewertet wird.

28 [32]

## Implementation und Repräsentation von Datenstrukturen

- ▶ Datenstrukturen werden intern durch **Objekte** in einem **Heap** repräsentiert
- ▶ Bezeichner werden an **Referenzen** in diesen Heap gebunden
- ▶ Unendliche Datenstrukturen haben zyklische Verweise
  - ▶ Kopf wird nur **einmal** ausgewertet.

```
cycle (trace "Foo!" [5])
```
- ▶ **Anmerkung**: unendlich Datenstrukturen nur sinnvoll für **nicht-strikte** Funktionen

29 [32]

## Überladene Funktionen sind langsam.

- ▶ Typklassen sind elegant aber **langsam**.
  - ▶ Implementierung von Typklassen: **Verzeichnis** (dictionary) von Klassenfunktionen.
  - ▶ Überladung wird zur **Laufzeit** aufgelöst
- ▶ Bei kritischen Funktionen: **Spezialisierung erzwingen** durch Angabe der Signatur
- ▶ NB: **Zahlen** (numerische Literale) sind in Haskell **überladen!**
  - ▶ Bsp: **facts** hat den Typ `Num a => a -> a`

```
facts n = if n == 0 then 1 else n * facts (n-1)
```

30 [32]

## Listen als Performance-Falle

- ▶ Listen sind **keine** Felder oder endliche Abbildungen
- ▶ Listen:
  - ▶ Beliebig lang
  - ▶ Zugriff auf **n-tes** Element in **linearer** Zeit ( $O(n)$ )
  - ▶ Abstrakt: frei erzeugter Datentyp aus Kopf und Rest
- ▶ **Felder** `Array ix a` (Modul `Data.Array` aus der Standardbücherei )
  - ▶ **Feste** Größe (Untermenge von `ix`)
  - ▶ Zugriff auf **n-tes** Element in **konstanter** Zeit ( $O(1)$ )
  - ▶ Abstrakt: Abbildung `Index` auf Daten
- ▶ **Endliche Abbildung** `Map k v` (Modul `Data.Map`)
  - ▶ Beliebig große
  - ▶ Zugriff auf **n-tes** Element in **sublinearer** Zeit ( $O(\log n)$ )
  - ▶ Abstrakt: Abbildung Schlüsselbereich `k` auf Wertebereich `v`
  - ▶ Sonderfall: `Set k ≡ Map k Bool`

31 [32]

## Zusammenfassung

- ▶ **Endrekursion**: `while` für Haskell.
  - ▶ Überführung in Endrekursion meist möglich.
  - ▶ Noch besser sind strikte Funktionen.
- ▶ **Speicherlecks** vermeiden: **Striktheit** und **Endrekursion**
- ▶ **Compileroptimierung** nutzen
- ▶ Datenstrukturen müssen nicht **endlich repräsentierbar** sein
- ▶ **Überladene Funktionen** sind langsam.
- ▶ **Listen** sind keine Felder oder endliche Abbildungen.

32 [32]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung  
Vorlesung 13 vom 20.01.15: Scala — Eine praktische Einführung

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2893

1 [15]

## Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ **Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben**
  - ▶ Aktionen und Zustände
  - ▶ Effizienzaspekte
  - ▶ **Scala — Eine praktische Einführung**
  - ▶ Rückblick & Ausblick

2 [15]

## Heute: Scala

- ▶ A **scalable language**
- ▶ Rein objektorientiert
- ▶ Funktional
- ▶ Eine "JVM-Sprache"
- ▶ Seit 2004 von Martin Odersky, EPFL Lausanne (<http://www.scala-lang.org/>).
- ▶ Seit 2011 kommerziell durch Typesafe Inc.

3 [15]

## Scala am Beispiel: 01-GCD.scala

Was sehen wir hier?

- ▶ Interaktive Auswertung
- ▶ Variablen, veränderlich — *Mit Vorsicht benutzen!*
- ▶ Werte, unveränderlich
- ▶ **while-Schleifen — Unnötig!**
- ▶ Rekursion — einfache Endrekursion wird optimiert
- ▶ Typinferenz — mehr als Java, weniger als Haskell

4 [15]

## Scala am Beispiel: 02-Rational.scala

Was sehen wir hier?

- ▶ Klassenparameter
- ▶ **this**
- ▶ Methoden, Syntax für Methodenanwendung
- ▶ **override** (nicht optional)
- ▶ private Werte und Methoden
- ▶ Klassenvorbedingung (**require**)
- ▶ Overloading
- ▶ Operatoren

5 [15]

## Algebraische Datentypen: 03-Expr.scala

Was sehen wir hier?

- ▶ **case class** erzeugt
  - ▶ Factory-Methode für Konstruktoren
  - ▶ Parameter als implizite **val**
  - ▶ abgeleitete Implementierung für **toString**, **equals**
  - ▶ ... und **pattern matching**
- ▶ **Pattern** sind
  - ▶ **case 4** => — Literale
  - ▶ **case C(4)** => — Konstruktoren
  - ▶ **case C(x)** => — Variablen
  - ▶ **case C(\_)** => — Wildcards
  - ▶ **case x: C** => — getypte pattern
  - ▶ **case C(D(x: T), y), 4)** => — geschachtelt

6 [15]

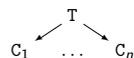
## Implementierung algebraischer Datentypen

Haskell:

```
data T = C1 | ... | Cn
```

- ▶ Ein Typ T
- ▶ Konstruktoren erzeugen Datentyp

Scala:



- ▶ Varianten als **Subtypen**
- ▶ Problem und Vorteil: **Erweiterbarkeit**
- ▶ **sealed** verhindert Erweiterung

7 [15]

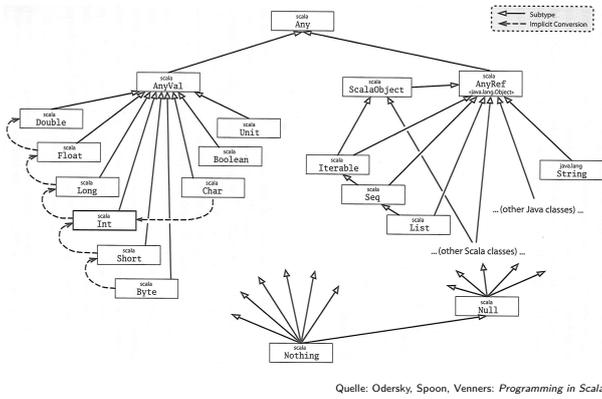
## Das Typsystem

Das Typsystem behebt mehrere Probleme von Java:

- ▶ Werte vs. Objekte
- ▶ Scala vs. Java
- ▶ **NULL references**

8 [15]

## Vererbungshierarchie



9 [15]

## Parametrische Polymorphie

- ▶ Typparameter (wie in Haskell, Generics in Java), Bsp. `List[T]`
- ▶ Problem: Vererbung und Polymorphie
- ▶ Ziel: wenn  $S < T$ , dann  $List[S] < List[T]$
- ▶ Does **not work** — 04-Ref.hs
- ▶ Warum?
  - ▶ Funktionsraum nicht monoton im ersten Argument
  - ▶ Sei  $X \subseteq Y$ , dann  $Z \rightarrow X \subseteq Z \rightarrow Y$ , aber  $X \rightarrow Z \not\subseteq Y \rightarrow Z$
  - ▶ Sondern  $Y \rightarrow Z \subseteq X \rightarrow Z$

10 [15]

## Typvarianz

- |                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><code>class C[+T]</code></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <b>Kovariant</b></li> <li>▶ <math>S &lt; T</math>, dann <math>C[S] &lt; C[T]</math></li> <li>▶ Parameter T nur im Wertebereich von Methoden</li> </ul> | <p><code>class C[T]</code></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <b>Rigide</b></li> <li>▶ Kein Subtyping</li> <li>▶ Parameter T kann beliebig verwendet werden</li> </ul> | <p><code>class C[-T]</code></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <b>Kontravariant</b></li> <li>▶ <math>S &lt; T</math>, dann <math>C[T] &lt; C[S]</math></li> <li>▶ Parameter T nur im Definitionsbereich von Methoden</li> </ul> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beispiel:

```
class Function[-S, +T] {
 def apply(x:S) : T
}
```

11 [15]

## Traits: 05-Funny.scala

Was sehen wir hier?

- ▶ Traits (Mix-ins): abstrakte Klassen, Interfaces; Haskell: Typklassen
- ▶ Unterschied zu Klassen:
  - ▶ Keine Parameter
  - ▶ Keine feste Oberklasse (super dynamisch gebunden)
- ▶ Nützlich zur Strukturierung:

*thin interface + trait = rich interface*

Beispiel: 05-Ordered.scala, 05-Rational.scala

12 [15]

## Was wir ausgelassen haben...

- ▶ Komprehension (nicht nur für Listen)
- ▶ Gleichheit (`==`, `equals`)
- ▶ Implizite Parameter und Typkonversionen
- ▶ Nebenläufigkeit (Aktoren)

13 [15]

## Scala — Die Sprache

- ▶ Objekt-orientiert:
  - ▶ Veränderlicher, gekapselter **Zustand**
  - ▶ Subtypen und Vererbung
  - ▶ Klassen und Objekte
- ▶ Funktional:
  - ▶ Unveränderliche **Werte**
  - ▶ Polymorphie
  - ▶ Funktionen höherer Ordnung

14 [15]

## Beurteilung

- ▶ **Vorteile:**
  - ▶ Funktional programmieren, in der Java-Welt leben
  - ▶ Gelungene Integration funktionaler und OO-Konzepte
  - ▶ Sauberer Sprachentwurf, effiziente Implementierung, reiche Büchereien
- ▶ **Nachteile:**
  - ▶ Manchmal etwas **zu** viel
  - ▶ Entwickelt sich ständig weiter
  - ▶ One-Compiler-Language, vergleichsweise langsam
- ▶ Mehr Scala?
  - ▶ Besuchen Sie auch unsere Veranstaltung **Reaktive Programmierung**

15 [15]

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung  
Vorlesung 14 vom 27.01.15: Schlußbemerkungen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2014/15

Rev. 2904

1 [26]

## Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben
  - ▶ Aktionen und Zustände
  - ▶ Effizienzaspekte
  - ▶ Scala — Eine praktische Einführung
  - ▶ Rückblick & Ausblick

2 [26]

## Organisatorisches

- ▶ Scheinvordruck benötigt?
- ▶ Bitte an der [Online-Evaluation](#) teilnehmen (stud.ip)

3 [26]

## Inhalt

- ▶ Wiederholung
- ▶ Rückblick
- ▶ Ausblick

4 [26]

## Fachgespräch: Beispielaufgabe

Definieren Sie eine Funktion `leastSpaces`, welche aus einer nicht-leeren Liste von Zeichenketten diejenige zurückgibt, welche die wenigsten Leerzeichen enthält.

*Beispiel:*

```
leastSpaces ["a_b_c", "pqr", "x_y_z"] ~> "pqr"
```

5 [26]

## Verständnisfragen

Auf allen Übungsblättern finden sich Verständnisfragen zur Vorlesung. Diese sind nicht Bestandteil der Abgabe, können aber im Fachgespräch thematisiert werden. Wenn Sie das Gefühl haben, diese Fragen nicht sicher beantworten zu können, wenden Sie sich gerne an Ihren Tutor, an Berthold Hoffmann in seiner Fragestunde, oder an den Dozenten.

6 [26]

## Verständnisfragen

1. Was bedeutet Striktheit, und welche in Haskell definierbaren Funktionen haben diese Eigenschaft?
2. Was ist ein algebraischer Datentyp, und was ist ein Konstruktor?
3. Was sind die drei Eigenschaften, welche die Konstruktoren eines algebraischen Datentyps auszeichnen, was ermöglichen sie und warum?

**Achtung:** waren nicht auf dem Übungsblatt 1.

7 [26]

## Verständnisfragen: Übungsblatt 2

1. Welche zusätzliche Mächtigkeit wird durch Rekursion bei algebraischen Datentypen in der Modellierung erreicht? Was läßt sich mit rekursiven Datentypen modellieren, was sich nicht durch nicht-rekursive Datentypen erreichen läßt?
2. Was ist der Unterschied zwischen Bäumen und Graphen, in Haskell modelliert?
3. Was sind die wesentlichen Gemeinsamkeiten, und was sind die wesentlichen Unterschiede zwischen algebraischen Datentypen in Haskell, und Objekten in Java?

8 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 3

1. Was ist Polymorphie?
2. Welche zwei Arten der Polymorphie haben wir kennengelernt, und wie unterschieden sie sich?
3. Was ist der Unterschied zwischen Polymorphie in Haskell, und Polymorphie in Java?

9 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 4

1. Was kennzeichnet einfach rekursive Funktionen, wie wir sie in der Vorlesung kennengelernt haben, und wie sind sie durch die Funktion `foldr` darstellbar?
2. Welche anderen geläufigen Funktionen höherer Ordnung kennen wir?
3. Was ist  $\eta$ -Kontraktion, und warum ist es zulässig?
4. Wann verwendet man `foldr`, wann `foldl`, und unter welchen Bedingungen ist das Ergebnis das gleiche?

10 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 5

1. `foldr` ist die „kanonische einfach rekursive Funktion“ (Vorlesung). Was bedeutet das, und warum ist das so? Für welche Datentypen gilt das?
2. Wann kann `foldr f a xs` auch für ein zyklisches Argument `xs` (bspw. eine zyklische Liste) terminieren?
3. Was ist die Grundidee hinter Parserkombinatoren, und funktioniert diese Idee nur für Parser oder auch für andere Problemstellungen?

11 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 6

1. Warum ist es hilfreich, Typen abzuleiten und nicht nur die gegebene Typisierung zu überprüfen?
2. Welches sind drei charakteristische Eigenschaften von Haskell's Typsystem (Hindley-Milner)?
3. Was ist ein Typschema, und wozu wird es im Hindley-Milner-Typsystem benötigt?

12 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 7

1. Was ist ein abstrakter Datentyp (ADT)?
2. Was sind Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen ADTs und Objekten, wie wir sie aus Sprachen wie Java kennen?
3. Wozu dienen Module in Haskell?

13 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 8

1. Wie können wir die Typen und Operationen der Signatur eines abstrakten Datentypen grob klassifizieren, und welche Auswirkungen hat diese Klassifikation auf die zu formulierenden Eigenschaften?
2. Warum „finden Tests Fehler“, aber „zeigen Beweise Korrektheit“, wie in der Vorlesung behauptet? Stimmt das immer?
3. Müssen Axiome immer ausführbar sein? Welche Axiome wären nicht ausführbar?

14 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 9

1. Der Datentyp `Stream  $\alpha$`  ist definiert als `data Stream  $\alpha$  = Cons  $\alpha$  (Stream  $\alpha$ )`. Gibt es für diesen Datentyp ein Induktionsprinzip? Ist es sinnvoll?
2. Welche nichtausführbaren Prädikate haben wir in der Vorlesung kennengelernt?
3. Wie kann man in einem Induktionsbeweis die Induktionsvoraussetzung stärken?
4. Gibt es einen Weihnachtsmann?

15 [26]

### Verständnisfragen: Übungsblatt 10

1. Warum ist die Erzeugung von Zufallszahlen eine Aktion?
2. Warum sind Aktionen nicht explizit als Zustandsübergang modelliert, sondern implizit als abstrakter Datentyp IO?
3. Was ist (außer dem Mangel an referentieller Transparenz) die entscheidende Eigenschaft, die Aktionen von reinen Funktionen unterscheidet?

16 [26]

## Verständnisfragen: Übungsblatt 11

1. Warum sind endrekursive Funktionen im allgemeinen schneller als nicht-endrekursive Funktionen? Unter welchen Voraussetzungen kann ich eine Funktion in endrekursive Form überführen?
2. Ist eine in allen Argumenten als strikt erkannte und übersetzte Funktion immer schneller in der Ausführung als dieselbe als nicht-strikt übersetzte Funktion?
3. Warum kann ich die Funktion seq nicht in Haskell definieren?

17 [26]

## Warum funktionale Programmierung lernen?

- ▶ Denken in Algorithmen, nicht in Programmiersprachen
- ▶ **Abstraktion**: Konzentration auf das Wesentliche
- ▶ **Wesentliche** Elemente moderner Programmierung:
  - ▶ Datenabstraktion und Funktionale Abstraktion
  - ▶ Modularisierung
  - ▶ Typisierung und Spezifikation
- ▶ Blick über den Tellerrand — Blick in die Zukunft
- ▶ Studium  $\neq$  Programmierkurs — was kommt in 10 Jahren?

18 [26]

## Zusammenfassung Haskell

### Stärken:

- ▶ Abstraktion durch
  - ▶ Polymorphie und Typsystem
  - ▶ algebraische Datentypen
  - ▶ Funktionen höherer Ordnung
- ▶ Flexible Syntax
- ▶ Haskell als Meta-Sprache
- ▶ Ausgereifter Compiler
- ▶ Viele Büchereien

### Schwächen:

- ▶ Komplexität
- ▶ Büchereien
  - ▶ Nicht immer gut gepflegt
- ▶ Viel im Fluß
  - ▶ Kein stabiler und brauchbarer Standard
- ▶ Divergierende Ziele:
  - ▶ Forschungsplattform **und** nutzbares Werkzeug

19 [26]

## Andere Funktionale Sprachen

- ▶ **Standard ML (SML)**:
  - ▶ Streng typisiert, strikte Auswertung
  - ▶ Standardisiert, formal definierte Semantik
  - ▶ Drei aktiv unterstützte Compiler
  - ▶ Verwendet in Theorembeweisern (Isabelle, HOL)
  - ▶ <http://www.standardml.org/>
- ▶ **Caml, O'Caml**:
  - ▶ Streng typisiert, strikte Auswertung
  - ▶ Hocheffizienter Compiler, byte code & nativ
  - ▶ Nur ein Compiler (O'Caml)
  - ▶ <http://caml.inria.fr/>

20 [26]

## Andere Funktionale Sprachen

- ▶ **LISP** und **Scheme**
  - ▶ Ungetypt/schwach getypt
  - ▶ Seiteneffekte
  - ▶ Viele effiziente Compiler, aber viele Dialekte
  - ▶ Auch industriell verwendet
- ▶ **Hybridsprachen**:
  - ▶ Scala (Functional-OO, JVM)
  - ▶ F# (Functional-OO, .Net)
  - ▶ Clojure (Lisp, JVM)

21 [26]

## Was spricht gegen funktionale Programmierung?

- ▶ Mangelnde **Unterstützung**:
  - ▶ Libraries, Dokumentation, Entwicklungsumgebungen
  - ▶ Wird besser (Scala, F#)...
- ▶ **Programmierung** nur kleiner Teil der SW-Entwicklung
- ▶ **Nicht verbreitet** — funktionale Programmierer zu **teuer**
- ▶ **Konservatives Management**
  - ▶ "Nobody ever got fired for buying IBM"

22 [26]

## Funktionale Programmierung in der Industrie

- ▶ **Erlang**
  - ▶ schwach typisiert, nebenläufig, strikt
  - ▶ Fa. Ericsson — Telekom-Anwendungen
- ▶ **FL**
  - ▶ ML-artige Sprache
  - ▶ Chip-Verifikation der Fa. Intel
- ▶ **Python** (und andere Skriptsprachen):
  - ▶ Listen, Funktionen höherer Ordnung (map, fold), anonyme Funktionen, Listenkomprehension
- ▶ **Scala**:
  - ▶ Zum Beispiel Twitter, Foursquare, ...

23 [26]

## Perspektiven funktionaler Programmierung

- ▶ **Forschung**:
  - ▶ Ausdrucksstärkere Typsysteme
  - ▶ für effiziente Implementierungen
  - ▶ und eingebaute Korrektheit (Typ als Spezifikation)
  - ▶ Parallelität?
- ▶ **Anwendungen**:
  - ▶ Eingebettete domänenspezifische Sprachen
  - ▶ Zustandsfreie Berechnungen (MapReduce, Hadoop)
  - ▶ **Big Data** and **Cloud Computing**

24 [26]

## If you liked this course, you might also like . . .

- ▶ Die Veranstaltung **Reaktive Programmierung** (Sommersemester 2015)
  - ▶ Scala, nebenläufige Programmierung, fortgeschrittene Techniken der funktionalen Programmierung
- ▶ Wir suchen **studentische Hilfskräfte** am DFKI, FB CPS
  - ▶ Scala als Entwicklungssprache
- ▶ Wir suchen **Tutoren für PI3**
  - ▶ Im WS 15/16 — **meldet Euch** bei Berthold Hoffmann (oder bei mir)!

Tschüß!

