Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 3 vom 30.10.2012: Rekursive Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2012/13

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
  - Einführung
  - Funktionen und Datentypen
  - Rekursive Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Funktionen höherer Ordnung II
  - Typinferenz
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- Rekursive Datentypen
  - Rekursive Definition
  - ... und wozu sie nützlich sind
  - Rekursive Datentypen in anderen Sprachen
  - Fallbeispiel: Labyrinthe

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

Definition eines algebraischen Datentypen T:

$$\begin{aligned} \text{data T} = \quad & C_1\ t_{1,1} \ldots t_{1,k_1} \\ & \ldots \\ \mid \quad & C_n\ t_{n,1} \ldots t_{n,k_n} \end{aligned}$$

- Konstruktoren $C_1, \ldots, C_n$ sind disjunkt:
$$C_i\ x_1 \ldots x_n = C_j\ y_1 \ldots y_m \longrightarrow i = j$$
- Konstruktoren sind injektiv:
$$C\ x_1 \ldots x_n = C\ y_1 \ldots y_n \longrightarrow x_i = y_i$$
- Konstruktoren erzeugen den Datentyp:
$$\forall x \in T.\, x = C_i\ y_1 \ldots y_m$$

Diese Eigenschaften machen Fallunterscheidung möglich.

Heute: Rekursion

Rekursive Datentypen

- Der definierte Typ T kann rechts benutzt werden.
- Rekursive Datentypen sind unendlich
- Entspricht induktiver Definition
- Modelliert Aggregation (Sammlung von Objekten)
- Funktionen werden durch Rekursion definiert

Algebraische Datentypen: Nomenklatur

Gegeben Definition

$$\begin{aligned} \text{data T} = \quad & C_1\ t_{1,1} \ldots t_{1,k_1} \\ & \ldots \\ \mid \quad & C_n\ t_{n,1} \ldots t_{n,k_n} \end{aligned}$$

- C_i sind Konstruktoren (vordefiniert)
- Selektoren sind Funktionen $sel_{i,j}$:

  $sel_{i,j}\ (C_i\ t_{i,1} \ldots\ t_{i,k_i}) = t_{i,j}$

  - Partiell, linksinvers zu Konstruktor
  - Können vordefiniert werden (erweiterte Syntax der data Deklaration)
- Diskriminatoren sind Funktionen dis_i:

$$\begin{aligned} dis_i\ & :: T \to Bool \\ dis_i\ (C_i \ldots) & = True \\ dis_i\ \_ & = False \end{aligned}$$

  - Definitionsbereichsbereich des Selektors sel_i
  - Nie vordefiniert

Uncle Bob's Auld Time Grocery Shoppe Revisited

- Ein Lager für Bob's Shoppe:
  - entweder leer
  - oder es enthält Artikel und Menge, und weiteres

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

Suchen im Lager

- Rekursive Suche:

```
suche :: Artikel → Lager → Resultat
suche art (Lager lart m l)
  | art == lart = Gefunden m
  | otherwise   = suche art l
suche art LeeresLager  = Nichtgefunden
```

- Resultat:

```
data Resultat = Gefunden Menge | Nichtgefunden
```

Einlagern

- Mengen sollen aggregiert werden, e.g. 35l Milch und 20l Milch werden 55l Milch

```
einlagern :: Artikel → Menge → Lager → Lager
einlagern a m l =
  let hinein a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
      hinein a m (Lager al ml l)
        | a == al   = Lager a (addiere m ml) l
        | otherwise = Lager al ml (hinein a m l)
  in case preis a m of
       Ungueltig → l
       _ → hinein a m l
```

```
addiere (Stueck i) (Stueck j)= Stueck (i+ j)
addiere (Gramm g) (Gramm h)  = Gramm (g+ h)
addiere (Liter l) (Liter m)  = Liter (l+ m)
addiere m n = error ("addiere: " ++ show m++ " und " ++
```

Einkaufen und bezahlen

- Artikel einkaufen:

```
einkauf :: Artikel → Menge → Einkaufswagen → Einkauf
einkauf a m e =
  case preis a m of
    Ungueltig → e
    _ → Einkauf a m e
```

- Gesamtsumme berechnen:

```
kasse :: Einkaufswagen → Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

Beispiel: Kassenbon

```
kassenbon :: Einkaufswagen → String
```

Ausgabe:

```
Bob's Aulde Grocery Shoppe

Artikel                  Menge      Preis
-------------------------------------------
Schinken                  50 g.   0.99 EU
Milch Bio                1.0 l.   1.19 EU
Schinken                  50 g.   0.99 EU
Apfel Boskoop              3 St   1.65 EU
===========================================
Summe:                            4.82 EU
```

Unveränderlicher Kopf

Ausgabe von Artikel und Mange (rekursiv)

Ausgabe von kasse

Kassenbon: Implementation

- Kernfunktion:

```
artikel :: Einkaufswagen → String
artikel LeererWagen = ""
artikel (Einkauf a m e) =
   formatL 20 (show a) ++
   formatR 7  (menge m) ++
   formatR 10 (showEuro (cent a m)) ++ "\n"++
      artikel e
```

- Hilfsfunktionen:

```
formatL :: Int → String → String
```

```
formatR :: Int → String → String
```

```
showEuro :: Int → String
```

Rekursive Typen in Java

- Nachbildung durch Klassen, z.B. für Listen:

```
class List {
  public List(Object el, List tl) {
    this.elem= el;
    this.next= tl;
  }
  public Object elem;
  public List   next;
```

- Länge (iterativ):

```
  int length() {
    int i= 0;
    for (List cur= this; cur != null; cur= cur.next)
      i++;
    return i;
  }
```

Rekursive Typen in C

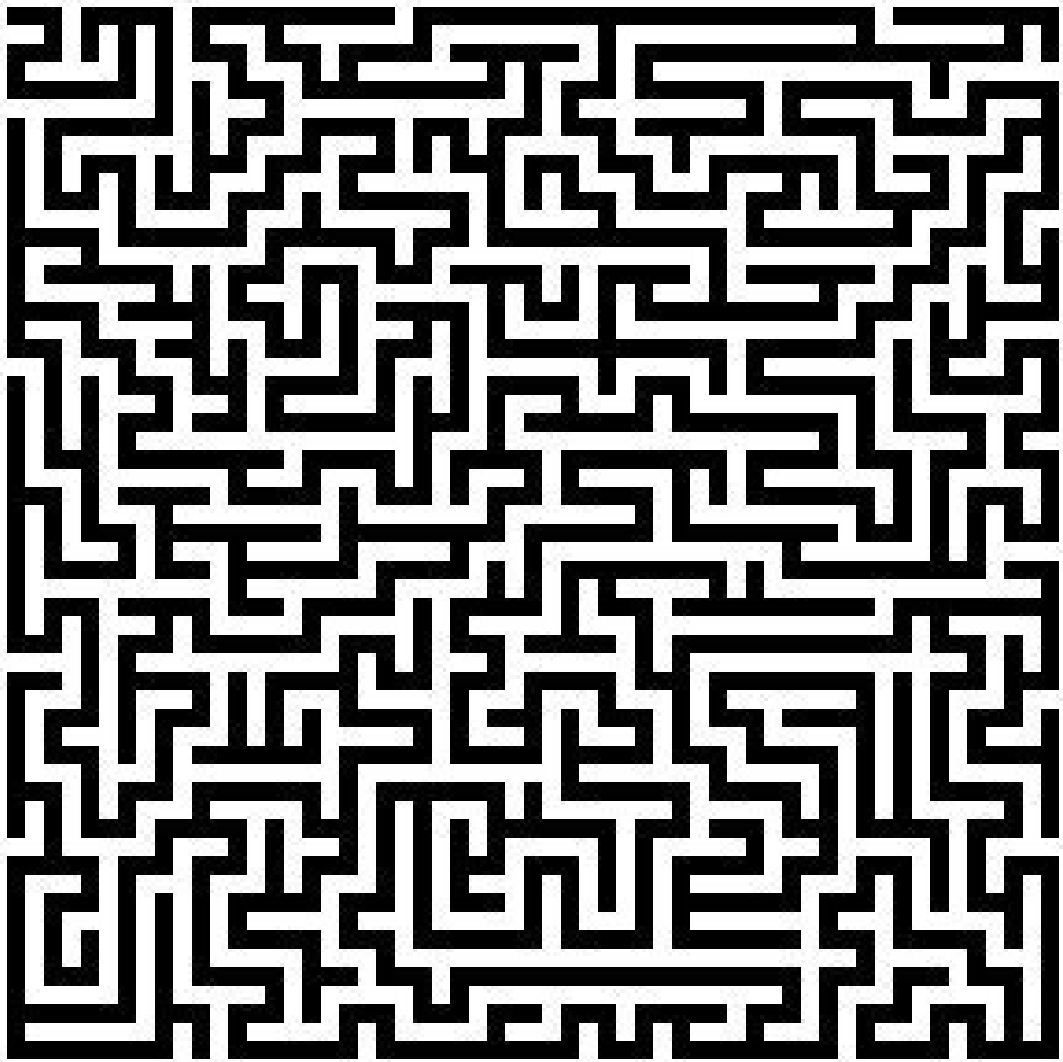
- C: Produkte, Aufzählungen, keine rekursiven Typen
- Rekursion durch Zeiger

```
typedef struct list_t {
      void           *elem;
      struct list_t  *next;
      } *list;
```

- Konstruktoren nutzerimplementiert

```
list cons(void *hd, list tl)
{ list l;
  if ((l= (list)malloc(sizeof(struct list_t)))== NUL
    printf("Out␣of␣memory\n"); exit(-1);
  }
  l→ elem= hd; l→ next= tl;
  return l;
}
```

Fallbeispiel: Zyklische Datenstrukturen



Quelle: docs.gimp.org

Modellierung des Labyrinths

- Ein Labyrinth ist entweder
  - eine Sackgasse,
  - ein Weg, oder
  - eine Abzweigung in zwei Richtungen.

```
data Lab = Dead Id
         | Pass Id Lab
         | TJnc Id Lab Lab
```

- Ferner benötigt: eindeutige Bezeichner der Knoten

```
type Id  = Int
```

Traversion des Labyrinths

- Ziel: Pfad zu einem gegeben Ziel finden

- Benötigt Pfade und eine Strategie

```
data Path = Cons Id Path
          | Mt
```

```
data Trav = Succ Path
          | Fail
```

Traversionsstrategie

- An jedem Knoten prüfen, ob Ziel erreicht, ansonsten
  - an Sackgasse Fail
  - an Passagen weiterlaufen
  - an Kreuzungen Auswahl treffen
- erfordert Propagation von Fail:

```
cons :: Id → Trav → Trav
```

```
select :: Trav → Trav → Trav
```

- Geht von zyklenfreien Labyrinth aus

Zyklenfreie Traversion

```
traverse1 :: Id → Lab → Trav
traverse1 t (Dead i)
  | i == t = Succ (Cons i Mt)
  | otherwise   = Fail
traverse1 t (Pass i l)
  | t == i  = Succ (Cons i Mt)
  | otherwise    = cons i (traverse1 t l)
traverse1 t (TJnc i l m)
  | t == i  = Succ (Cons i Mt)
  | otherwise    = select (cons i (traverse1 t l))
                          (cons i (traverse1 t m))
```

Traversion mit Zyklen

```
traverse2 :: Id → Lab → Path → Trav
traverse2 t (Dead i) p
  | i == t = Succ (rev (Cons i p))
  | otherwise   = Fail
traverse2 t (Pass i l) p
  | contains i p = Fail
  | t == i  = Succ (rev (Cons i p))
  | otherwise    = traverse2 t l (Cons i p)
traverse2 t (TJnc i l m) p
  | contains i p = Fail
  | t == i  = Succ (rev (Cons i p))
  | otherwise    = select (traverse2 t l (Cons i p))
                          (traverse2 t m (Cons i p))
```

Traversion mit Zyklen

- Veränderte Strategie: Pfad bis hierher übergeben
- Wenn aktueller Knoten in bisherigen Pfad enthalten ist, Fail
- Ansonsten wie oben
- Neue Hilfsfunktionen

```
contains :: Id → Path → Bool
```

```
rev :: Path → Path
```

Zusammenfassung Labyrinth

- Labyrinth $\longrightarrow$ Graph oder Baum
- In Haskell: gleicher Datentyp
- Referenzen nicht explizit in Haskell
  - Keine undefinierten Referenzen (erhöhte Programmsicherheit)
  - Keine Gleichheit auf Referenzen
  - Gleichheit ist immer strukturell (oder selbstdefiniert)

Beispiel: Zeichenketten selbstgemacht

- Eine Zeichenkette ist
  - entweder leer (das leere Wort ϵ)
  - oder ein Zeichen *c* und eine weitere Zeichenkette *xs*

```
data MyString = Empty
              | Cons Char MyString
```

- Lineare Rekursion
  - Genau ein rekursiver Aufruf

Rekursive Definition

- Typisches Muster: Fallunterscheidung
  - Ein Fall pro Konstruktor
- Hier:
  - Leere Zeichenkette
  - Nichtleere Zeichenkette

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
len :: MyString → Int
len Empty          = 0
len (Cons c str) = 1+ len str
```

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
len :: MyString → Int
len Empty          = 0
len (Cons c str) = 1+ len str
```

- Verkettung:

```
cat :: MyString → MyString → MyString
cat Empty t        = t
cat (Cons c s) t = Cons c (cat s t)
```

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
len :: MyString → Int
len Empty          = 0
len (Cons c str) = 1+ len str
```

- Verkettung:

```
cat :: MyString → MyString → MyString
cat Empty t        = t
cat (Cons c s) t = Cons c (cat s t)
```

- Umkehrung:

```
rev :: MyString → MyString
rev Empty        = Empty
rev (Cons c t) = cat (rev t) (Cons c Empty)
```

Was haben wir gesehen?

- Strukturell ähnliche Typen:
  - Einkaufswagen, Path, MyString (Listen-ähnlich)
  - Resultat, Preis, Trav (Punktierte Typen)
- Ähnliche Funktionen darauf
- Besser: eine Typdefinition mit Funktionen, instantiierung zu verschiedenen Typen

$\rightsquigarrow$Nächste Vorlesung

Zusammenfassung

- Datentypen können rekursiv sein
- Rekursive Datentypen sind unendlich (induktiv)
- Funktionen werden rekursiv definiert
- Fallbeispiele: Einkaufen in Bob's Shoppe, Labyrinthtraversion
- Viele strukturell ähnliche Typen
- Nächste Woche: Abstraktion über Typen (Polymorphie)