Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 2 vom 23.10.2012: Funktionen und Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2012/13

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
  - Einführung
  - Funktionen und Datentypen
  - Rekursive Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Funktionen höherer Ordnung II
  - Typinferenz
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- Auswertungsstrategien
  - Striktheit
- Definition von Funktionen
  - Syntaktische Feinheiten
- Definition von Datentypen
  - Aufzählungen
  - Produkte

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

  inc (double (inc 3)) $\rightsquigarrow$

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

$$\begin{aligned} \texttt{inc (double (inc 3))} &\rightsquigarrow \texttt{double (inc 3)}+ 1 \\ &\rightsquigarrow \end{aligned}$$

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

inc (double (inc 3)) ⇝ double (inc 3)+ 1
⇝ 2*(inc 3)+ 1
⇝

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

inc (double (inc 3)) ⇝ double (inc 3)+ 1
⇝ 2*(inc 3)+ 1
⇝ 2*(3+ 1)+ 1
⇝ 2*4+1 ⇝ 9

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

  inc (double (inc 3)) $\rightsquigarrow$ double (inc 3)+ 1
  $\rightsquigarrow$ 2*(inc 3)+ 1
  $\rightsquigarrow$ 2*(3+ 1)+ 1
  $\rightsquigarrow$ 2*4+1 $\rightsquigarrow$ 9
- Von innen nach außen (innermost-first):

  inc (double (inc 3)) $\rightsquigarrow$

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ double (inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(3+ 1)+ 1
  ⇝ 2*4+1 ⇝ 9
- Von innen nach außen (innermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ inc (double (3+1))
  ⇝

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ double (inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(3+ 1)+ 1
  ⇝ 2*4+1 ⇝ 9
- Von innen nach außen (innermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ inc (double (3+1))
  ⇝ inc (2*(3+ 1))
  ⇝

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ double (inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(3+ 1)+ 1
  ⇝ 2*4+1 ⇝ 9

- Von innen nach außen (innermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ inc (double (3+1))
  ⇝ inc (2*(3+ 1))
  ⇝ (2*(3+ 1))+ 1
  ⇝

Auswertungsstrategien

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
double :: Int → Int
double x = 2∗x
```

- Reduktion von inc (double (inc 3))
- Von außen nach innen (outermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ double (inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(inc 3)+ 1
  ⇝ 2*(3+ 1)+ 1
  ⇝ 2*4+1 ⇝ 9
- Von innen nach außen (innermost-first):

  inc (double (inc 3)) ⇝ inc (double (3+1))
  ⇝ inc (2*(3+ 1))
  ⇝ (2*(3+ 1))+ 1
  ⇝ 2*4+1 ⇝ 9

Konfluenz und Termination

Sei $\rightsquigarrow^*$ die Reduktion in null oder mehr Schritten.

Definition (Konfluenz)

$\rightsquigarrow^*$ ist konfluent gdw:
Für alle r, s, t mit $r \rightsquigarrow^* s, r \rightsquigarrow^* t$ gibt es u so dass $s \rightsquigarrow^* u, t \rightsquigarrow^* u$.

Definition (Termination)

$\rightsquigarrow$ ist terminierend gdw. es keine unendlichen Ketten gibt:

$$t_1 \rightsquigarrow t_2 \rightsquigarrow t_3 \rightsquigarrow \ldots t_n \rightsquigarrow \ldots$$

Auswertungsstrategien

Theorem (Konfluenz)

Funktionale Programme sind für jede Auswertungsstrategie konfluent.

Theorem (Normalform)

Terminierende funktionale Programme werten unter jeder Auswertungsstragie jeden Ausdruck zum gleichen Wert aus (der Normalform).

- Auswertungsstrategie für nicht-terminierende Programme relevant
- Nicht-Termination nötig (Turing-Mächtigkeit)

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Outermost-first entspricht call-by-need, verzögerte Auswertung.
- Innermost-first entspricht call-by-value, strikte Auswertung
- Beispiel:

```
repeat :: Int → String → String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von repeat 0 undefined

Striktheit

Definition (Striktheit)

Funktion f ist strikt $\iff$ Ergebnis ist undefiniert sobald ein Argument undefiniert ist

- Denotationelle Eigenschaft (nicht operational)
- Java, C etc. sind call-by-value (nach Sprachdefinition) und damit strikt
- Haskell ist nicht-strikt (nach Sprachdefinition)
  - Meisten Implementationen nutzen verzögerte Auswertung
- Fallunterscheidung ist immer nicht-strikt

Haskell-Syntax: Funktionsdefinitionsdefinition

Generelle Form:

- Signatur:

```
max :: Int → Int → Int
```

- Definition

```
max x y = if x < y then y else x
```

  - Kopf, mit Parametern
  - Rumpf (evtl. länger, mehrere Zeilen)
  - Typisches Muster: Fallunterscheidung, dann rekursiver Aufruf
  - Was gehört zum Rumpf (Geltungsberereich)?

Haskell-Syntax: Charakteristika

- Leichtgewichtig
  - Wichtigstes Zeichen:
- Funktionsapplikation: `f a`
  - Keine Klammern
- Abseitsregel: Gültigkeitsbereich durch Einrückung
  - Keine Klammern
- Auch in anderen Sprachen (Python, Ruby)

Haskell-Syntax I: Die Abseitsregel

Funktionsdefinition:

$$\mathtt{f}\ \mathtt{x}_1\ \mathtt{x}_2 \ldots \mathtt{x}_n = \mathtt{E}$$

- Geltungsbereich der Definition von f:
  alles, was gegenüber f eingerückt ist.
- Beispiel:

```
f x = hier faengts an
  und hier gehts weiter
      immer weiter
g y z = und hier faengt was neues an
```

- Gilt auch verschachtelt.
- Kommentare sind passiv

Haskell-Syntax II: Kommentare

- Pro Zeile: Ab `--` bis Ende der Zeile

```
f x y = irgendwas   -- und hier der Kommentar!
```

- Über mehrere Zeilen: Anfang {-, Ende -}

```
{-
   Hier fängt der Kommentar an
   erstreckt sich über mehrere Zeilen
   bis hier                              -}
f x y = irgendwas
```

  - Kann geschachtelt werden.

Haskell-Syntax III: Bedingte Definitionen

- Statt verschachtelter Fallunterscheidungen ...

```
f x y = if B1 then P else
        if B2 then Q else ...
```

...bedingte Gleichungen:

```
f x y
  | B1 =...
  | B2 =...
```

- Auswertung der Bedingungen von oben nach unten
- Wenn keine Bedingung wahr ist: Laufzeitfehler! Deshalb:

```
  | otherwise =...
```

Haskell-Syntax IV: Lokale Definitionen

- Lokale Definitionen mit where oder let:

```
f x y
  | g = P y
  | otherwise =
Q where
    y = M
    f x = N x
```

```
f x y =
 let y = M
     f x = N x
 in  if g then P y
          else Q
```

- f, y, ... werden gleichzeitig definiert (Rekursion!)
- Namen f, y und Parameter (x) überlagern andere
- Es gilt die Abseitsregel
  - Deshalb: Auf gleiche Einrückung der lokalen Definition achten!

Das Rechnen mit Zahlen

Beschränkte Genauigkeit,
konstanter Aufwand

$\longleftrightarrow$

beliebige Genauigkeit,
wachsender Aufwand

Das Rechnen mit Zahlen

Beschränkte Genauigkeit, konstanter Aufwand $\longleftrightarrow$ beliebige Genauigkeit, wachsender Aufwand

Haskell bietet die Auswahl:

- Int - ganze Zahlen als Maschinenworte ($\geq$ 31 Bit)
- Integer - beliebig große ganze Zahlen
- Rational - beliebig genaue rationale Zahlen
- Float, Double - Fließkommazahlen (reelle Zahlen)

Ganze Zahlen: Int und Integer

- Nützliche Funktionen (überladen, auch für Integer):

```
+, *, ^, -   :: Int → Int → Int
abs          :: Int → Int -- Betrag
div, quot    :: Int → Int → Int
mod, rem     :: Int → Int → Int
```

  Es gilt (div x y)*y + mod x y == x

- Vergleich durch ==, /=, <=, <, ...
- Achtung: Unäres Minus
  - Unterschied zum Infix-Operator -
  - Im Zweifelsfall klammern: abs (-34)

Fließkommazahlen: Double

- Doppeltgenaue Fließkommazahlen (IEEE 754 und 854)
  - Logarithmen, Wurzel, Exponentation, π und e, trigonometrische Funktionen
- Konversion in ganze Zahlen:
  - fromIntegral :: Int, Integer-> Double
  - fromInteger :: Integer-> Double
  - round, truncate :: Double-> Int, Integer
  - Überladungen mit Typannotation auflösen:

```
round (fromInt 10) :: Int
```

- Rundungsfehler!

Alphanumerische Basisdatentypen: Char

- Notation für einzelne Zeichen: 'a',...
- Nützliche Funktionen:

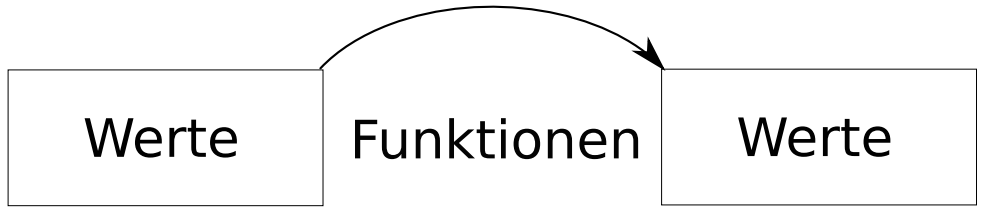
```
ord :: Char → Int
chr :: Int → Char

toLower :: Char→ Char
toUpper :: Char→ Char
isDigit :: Char→ Bool
isAlpha :: Char→ Bool
```

- Zeichenketten: String

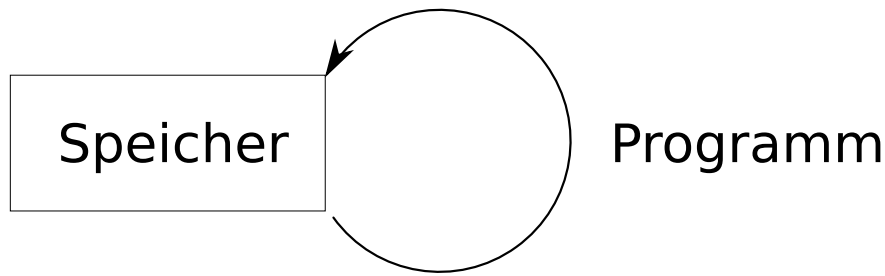
Datentypen als Modellierungskonstrukt

Programme manipulieren ein Modell (der Umwelt)

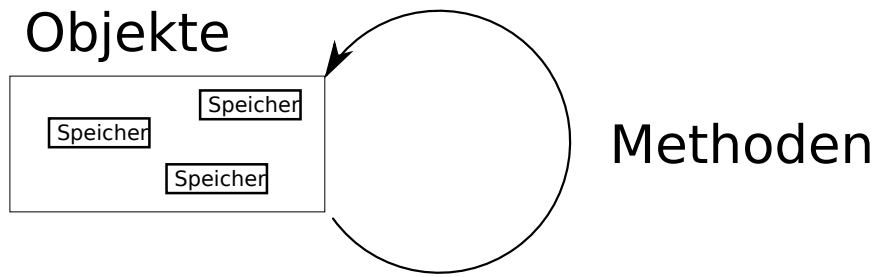
- Funktionale Sicht:



- Imperative Sicht:



- Objektorientierte Sicht:



Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Äpfel	Boskoop	55	ct/Stk
	Cox Orange	60	ct/Stk
	Granny Smith	50	ct/Stk
Eier		20	ct/Stk
Käse	Gouda	14,50	€/kg
	Appenzeller	22.70	€/kg
Schinken		1.99	€/100 g
Mettwurst		1.59	€/100 g
Milch		0.69	€/l
	Bio	1.19	€/l

Typkonstruktoren

- Aufzählungen
- Produkt
- Rekursion
- Funktionsraum

Aufzählungen

- Aufzählungen: Menge von disjunkten Konstanten

$$Apfel = \{Boskoop, Cox, Smith\}$$

$$Boskoop \neq Cox, Cox \neq Smith, Boskoop \neq Smith$$

- Genau drei unterschiedliche Konstanten
- Funktion mit Wertebereich *Apfel* muss drei Fälle unterscheiden
- Beispiel: $preis : Apfel \to \mathbb{N}$ mit

$$preis(a) = \begin{cases} 55 & a = Boskoop \\ 60 & a = Cox \\ 50 & a = Smith \end{cases}$$

Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- Definition

```
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

  - Implizite Deklaration der Konstruktoren Boskoop :: Apfel als Konstanten
  - Großschreibung der Konstruktoren

- Fallunterscheidung:

```
apreis :: Apfel → Int
apreis a = case a of
  Boskoop → 55
  CoxOrange → 60
  GrannySmith → 50
```

Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- Definition

```
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

  - Implizite Deklaration der Konstruktoren Boskoop :: Apfel als Konstanten
  - Großschreibung der Konstruktoren

- Fallunterscheidung:

```
apreis :: Apfel → Int
apreis a = case a of
  Boskoop → 55
  CoxOrange → 60
  GrannySmith → 50
```

```
data Farbe = Rot | Grn
farbe :: Apfel→ Farbe
farbe d =
 case d of
  GrannySmith → Grn
  _ → Rot
```

Fallunterscheidung in der Funktionsdefinition

- Abkürzende Schreibweisen (syntaktischer Zucker):

$$\begin{array}{l} f\ c_1 == e_1 \\ \ldots \\ f\ c_n == e_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad f\ x == \textbf{case}\ x\ \textbf{of}\ \begin{array}{l} c_1 \rightarrow e_1, \\ \ldots \\ c_n \rightarrow e_n \end{array}$$

- Damit:

```
preis :: Apfel → Int
preis Boskoop = 55
preis CoxOrange = 60
preis GrannySmith = 50
```

Der einfachste Aufzählungstyp

- Einfachste Aufzählung: Wahrheitswerte

$$Bool = \{True, False\}$$

  - Genau zwei unterschiedliche Werte

- Definition von Funktionen:

  - Wertetabellen sind explizite Fallunterscheidungen

$\wedge$	*true*	*false*
true	*true*	*false*
false	*false*	*false*

$$\begin{aligned} true \wedge true &= true \\ true \wedge false &= false \\ false \wedge true &= false \\ false \wedge false &= false \end{aligned}$$

Wahrheitswerte: Bool

- Vordefiniert als

```
data Bool = True | False
```

- Vordefinierte Funktionen:

```
not  :: Bool → Bool              -- Negation
&&   :: Bool → Bool → Bool       -- Konjunktion
||   :: Bool → Bool → Bool       -- Disjunktion
```

- Konjunktion definiert als

```
a && b = case a of True  → b
                   False → False
```

- &&, || sind rechts nicht strikt
  - 1 ==0 && div 1 0 ==0 ⇝ False
- if then else als syntaktischer Zucker:

$$\text{if } b \text{ then } p \text{ else } q \longrightarrow \text{case } b \text{ of } \begin{array}{l} \text{True} \to p \\ \text{False} \to q \end{array}$$

Beispiel: Ausschließende Disjunktion

- Mathematische Definiton:

```
exOr :: Bool → Bool → Bool
exOr x y = (x || y) && (not (x && y))
```

- Alternative 1: explizite Wertetabelle:

```
exOr False False = False
exOr True  False = True
exOr False True  = True
exOr True  True  = False
```

- Alternative 2: Fallunterscheidung auf ersten Argument

```
exOr True  y = not y
exOr False y = y
```

- Was ist am besten?
  - Effizienz, Lesbarkeit, Striktheit

Produkte

- Konstruktoren können Argumente haben
- Beispiel: Ein Datum besteht aus Tag, Monat, Jahr
- Mathematisch: Produkt (Tupel)

$$\begin{aligned} \mathit{Date} &= \{\mathit{Date}\ (n,\ m,\ y) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathit{Month}, y \in \mathbb{N}\} \\ \mathit{Month} &= \{\mathit{Jan}, \mathit{Feb}, \mathit{Mar}, \ldots\} \end{aligned}$$

- Funktionsdefinition:
  - Konstruktorargumente sind gebundene Variablen

$$\begin{aligned} \mathit{year}(D(n,m,y)) &= y \\ \mathit{day}(D(n,m,y)) &= n \end{aligned}$$

  - Bei der Auswertung wird gebundene Variable durch konkretes Argument ersetzt

Produkte in Haskell

- Konstruktoren mit Argumenten

```
data Date  = Date Int Month Int
data Month = Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun
           | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec
```

- Beispielwerte:

```
today     = Date 23 Oct 2012
bloomsday = Date 16 Jun 1904
```

- Über Fallunterscheidung Zugriff auf Argumente der Konstruktoren:

```
day  :: Date → Int
year :: Date → Int
day  d = case d of Date t m y → t
year (Date d m y) = y
```

Beispiel: Tag im Jahr

- Tag im Jahr: Tag im laufenden Monat plus Summe der Anzahl der Tage der vorherigen Monate

```
yearDay :: Date → Int
yearDay (Date d m y) = d + sumPrevMonths m where
  sumPrevMonths :: Month → Int
  sumPrevMonths Jan = 0
  sumPrevMonths m   = daysInMonth (prev m) y +
                      sumPrevMonths (prev m)
```

- Tage im Monat benötigt Jahr als Argument (Schaltjahr!)

```
daysInMonth :: Month → Int → Int
prev :: Month → Month
```

- Schaltjahr: Gregorianischer Kalender

```
leapyear :: Int → Bool
leapyear y = if mod y 100 == 0 then mod y 400 == 0
             else mod y 4 == 0
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaese = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaese → Double
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaese = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaese → Double
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

- Alle Artikel:

```
data Artikel =
    Apfel Apfel   | Eier
  | Kaese Kaese   | Schinken
  | Salami        | Milch Bool
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int   | Gramm  Int
           | Kilo Double | Liter  Double
```

- Der Preis und seine Berechnung:

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```

```
preis :: Artikel → Menge→ Preis
preis (Apfel a) (Stueck n) = Cent (n* apreis a)
preis Eier (Stueck n)      = Cent (n* 20)
preis (Kaese k)(Kilo kg) = Cent (round(kg*
                                  kpreis k))
preis Schinken (Gramm g) = Cent (g* 199)
preis Salami (Gramm g)   = Cent (g* 159)
preis (Milch bio) (Liter l) =
   Cent (round (l* if not bio then 69 else 119))
```

Auswertung der Fallunterscheidung

- Argument der Fallunterscheidung wird nur soweit nötig ausgewertet
- Beispiel:

```
data Foo = Foo Int | Bar

f :: Foo→ Int
f foo = case foo of Foo i → i; Bar → 0

g :: Foo→ Int
g foo = case foo of Foo i → 9; Bar → 0

add :: Foo→ Foo→ Foo
add (Foo i) (Foo j) = Foo (i+ j)
add _ _ = Bar
```

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

Definition eines algebraischen Datentypen T:

$$\begin{aligned} \text{data T} = \quad & \mathsf{C}_1\ \mathsf{t}_{1,1} \ldots \mathsf{t}_{1,k_1} \\ & \ldots \\ \mid \quad & \mathsf{C}_n\ \mathsf{t}_{n,1} \ldots \mathsf{t}_{n,k_n} \end{aligned}$$

- Konstruktoren $\mathsf{C}_1, \ldots, \mathsf{C}_n$ sind disjunkt:
$$\mathsf{C}_i\ \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n = \mathsf{C}_j\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_m \longrightarrow i = j$$
- Konstruktoren sind injektiv:
$$\mathsf{C}\ \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n = \mathsf{C}\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_n \longrightarrow \mathsf{x}_i = \mathsf{y}_i$$
- Konstruktoren erzeugen den Datentyp:
$$\forall x \in T.\, x = \mathsf{C}_i\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_m$$

Diese Eigenschaften machen Fallunterscheidung möglich.

Rekursion? $\rightsquigarrow$ Nächste Vorlesung!

Zusammenfassung

- Striktheit
  - Haskell ist spezifiziert als nicht-strikt
- Numerische Basisdatentypen:
  - Int, Integer, Rational und Double
- Alphanumerische Basisdatentypen: Char
- Datentypen und Funktionsdefinition dual
  - Aufzählungen — Fallunterscheidung
  - Produkte — Projektion
- Algebraische Datentypen
  - Drei wesentliche Eigenschaften der Konstruktoren
- Wahrheitswerte Bool
- Nächste Vorlesung: Rekursive Datentypen