Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung
Vorlesung 6 vom 20.11.2012: Funktionen Höherer Ordnung II

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2012/13

Fahrplan

Funktionen höherer Ordnung

- map und filter sind durch foldr darstellbar:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f = foldr (λa b→ f a: b) []
```

```
filter :: (α→ Bool)→ [α]→ [α]
filter p = foldr (λa as→ if p a then a:as
                                else as) []
```

foldr ist die kanonische einfach rekursive Funktion.

- Alle einfach rekursiven Funktionen sind als Instanz von foldr darstellbar.

$$\text{foldr}\ (:)\ [\,] = \text{id}$$

map als strukturerhalten Abbildung

map ist die kanonische strukturerhaltende Abbildung.

- Struktur (Shape) eines Datentyps T α ist T ().
  - Für Listen: [()] ≅ Nat.
- Für map gelten folgende Aussagen:

$$\text{map id} = \text{id}$$

$$\text{map f} \circ \text{map g} = \text{map (f} \circ \text{g)}$$

$$\text{length (map f xs)} = \text{length xs}$$

Grenzen von foldr

- Andere rekursive Struktur über Listen
  - Quicksort: baumartige Rekursion

```
qsort :: Ord a⇒ [a]→ [a]
qsort [] = []
qsort xs = qsort (filter (< head xs) xs) ++
           filter (head xs ==) xs ++
           qsort (filter (head xs <) xs)
```

- Rekursion nicht über Listenstruktur:
  - take: Rekursion über Int

```
take :: Int→ [a]→ [a]
take n _      | n ≤ 0 =  []
take _ []             =  []
take n (x:xs)         =  x : take (n−1) xs
```

  - Version mit foldr divergiert für nicht-endliche Listen

fold für andere Datentypen

fold ist universell

Jeder algebraische Datentyp T hat genau ein foldr.

- Kanonische Signatur für T:
  - Pro Konstruktor C ein Funktionsargument f_C
  - Freie Typvariable β für T
- Kanonische Definition:
  - Pro Konstruktor C eine Gleichung
  - Gleichung wendet Funktionsparameter f_C auf Argumente an

```
data IL = Cons Int IL | Err String | Mt

foldIL :: (Int→ β→ β)→ (String→ β)→ β→ IL→ β
foldIL f e a (Cons i il) = f i (foldIL f e a il)
foldIL f e a (Err str)   = e str
foldIL f e a Mt          = a
```


fold für bekannte Datentypen

- Bool: Fallunterscheidung:

```
data Bool = True | False

foldBool :: β→ β→ Bool→ β
foldBool a1 a2 True  = a1
foldBool a1 a2 False = a2
```

- Maybe a: Auswertung

```
data Maybe α = Nothing | Just α

foldMaybe :: β→ (α→ β)→ Maybe α→ β
foldMaybe b f Nothing  = b
foldMaybe b f (Just a) = f a
```

  - Als maybe vordefiniert

fold für bekannte Datentypen

- Tupel: die uncurry-Funktion

```
foldPair :: (α→ β→ γ)→ (α, β)→ γ
foldPair f (a, b)= f a b
```

- Natürliche Zahlen: Iterator

```
type Nat= Int   -- data Nat = Zero | Succ Nat
foldNat :: β→ (β→ β)→ Nat→ β
foldNat e f x | x == 0 = e
foldNat e f x | x > 0  = f (foldNat e f (x−1))
```

fold für binäre Bäume

- Binäre Bäume:

```
data Tree α = Mt | Node α (Tree α) (Tree α)
```

  - Label nur in den Knoten

- Instanzen von Map und Fold:

```
mapT :: (α→ β)→ Tree α→ Tree β
mapT f Mt = Mt
mapT f (Node a l r)=
  Node (f a) (mapT f l) (mapT f r)
```

```
foldT :: (α→ β→ β→ β)→ β→ Tree α→ β
foldT f e Mt = e
foldT f e (Node a l r) =
  f a (foldT f e l) (foldT f e r)
```

  - Kein (offensichtliches) Filter

Funktionen mit fold und map

- Höhe des Baumes berechnen:

```
height :: Tree α→ Int
height = foldT (λ_ l r→ 1+ l+ r) 0
```

- Inorder-Traversion der Knoten:

```
inorder :: Tree α→ [α]
inorder = foldT (λa l r→ l++ [a]++ r) []
```


Kanonische Eigenschaften von foldT und mapT

- Auch hier gilt:

$$\text{foldTree Node Mt} = id$$

$$\text{mapTree id} = \text{id}$$

$$\text{mapTree f} \circ \text{mapTree g} = \text{mapTree (f} \circ \text{g)}$$

$$\text{shape (mapTree f xs)} = \text{shape xs}$$

- Mit shape :: Tree $\alpha \to$ Tree ()

Das Labyrinth

- Das Labyrinth als variadischer Baum:

```
data Lab a = Node a [Lab a]
```

- Auch hierfür foldT und mapT:

```
foldT :: (a→ [b]→ b)→ Lab a→ b
foldT f (Node a ns) = f a (map (foldT f) ns)
```

```
mapT :: (a→ b)→ Lab a→ Lab b
mapT f (Node a ns) = Node (f a) (map (mapT f) ns)
```


Suche im Labyrinth

- Tiefensuche via foldT

```
dfts' :: Lab a→ [Path a]
dfts' n = foldT add n where
  add a [] = [[a]]
  add a ps = concatMap (map (a :)) ps
```

- Problem:
  - foldT terminiert nicht für zyklische Struturen
  - Auch nicht, wenn add prüft ob a schon enthalten ist

Tiefensuche direkt

- Deshalb direkte rekursive Lösung

```
dfts :: Eq a⇒ (Lab a→ Bool)→ Lab a→ [Path a]
dfts trg = dfts0 [] where
  dfts0 p n@(Node a ns)
    | trg n     = [reverse (a:p)]
    | elem a p  = []
    | otherwise = concatMap (dfts0 (a:p)) ns
```

- Funktioniert für alle Labyrinthe
- Flexible Termination durch Prädikat
  - Blätter in gerichteten Graphen

```
isLeaf (Node a ns) = null ns
```

  - Blätter in ungerichteten Graphen

```
isULeaf (Node a ns) = null ns || null (tail ns)
```


Zusammenfassung map und fold

- map und fold sind kanonische Funktionen höherer Ordnung
- Für jeden Datentyp definierbar
- foldl nur für Listen (linearer Datentyp)
- fold kann bei zyklischen Argumenten nicht terminieren
  - Problem: Termination von fold nur lokal entscheidbar

Funktionen Höherer Ordnung als Entwurfsmethodik

- Kombination von Basisoperationen zu komplexen Operationen
- Kombinatoren als Muster zur Problemlösung:
  - Einfache Basisoperationen
  - Wenige Kombinationsoperationen
  - Alle anderen Operationen abgeleitet
- Kompositionalität:
  - Gesamtproblem läßt sich zerlegen
  - Gesamtlösung durch Zusammensetzen der Einzellösungen

Kombinatoren im engeren Sinne

Definition (Kombinator)
Ein Kombinator ist ein punktfrei definierte Funktion höherer Ordnung.

- Herkunft: Kombinatorlogik (Schönfinkel, 1924)

$$\begin{aligned} K\ x\ y &\triangleright x \\ S\ x\ y\ z &\triangleright x\ z\ (y\ z) \\ I\ x &\triangleright x \end{aligned}$$

  S, K, I sind Kombinatoren
- Fun fact #1: kann alle berechenbaren Funktionen ausdrücken
- Fun fact #2: S und K sind genug: $I = S\ K\ K$

Beispiel: Parser

- Parser bilden Eingabe auf Parsierungen ab
  - Mehrere Parsierungen möglich
  - Backtracking möglich
- Kombinatoransatz:
  - Basisparser erkennen Terminalsymbole
  - Parserkombinatoren zur Konstruktion:
    - Sequenzierung (erst A, dann B)
    - Alternierung (entweder A oder B)
  - Abgeleitete Kombinatoren (z.B. Listen A^*, nicht-leere Listen A^+)

Modellierung in Haskell

Welcher Typ für Parser?

```
type Parse a b = [a] → [(b, [a])]
```

- Parametrisiert über Eingabetyp (Token) a und Ergebnis b
- Parser übersetzt Token in abstrakte Syntax
- Muss Rest der Eingabe modellieren
- Muss mehrdeutige Ergebnisse modellieren
- Beispiel: `"3+4*5"` ⇝ [(3, "+4*5"),
  (3+4, "*5"),
  (3+4*5, "")]

Basisparser

- Erkennt nichts:

```
none :: Parse a b
none = const []
```

- Erkennt alles:

```
suceed :: b→ Parse a b
suceed b inp = [(b, inp)]
```

- Erkennt einzelne Token:

```
spot :: (a→ Bool)→ Parse a a
spot p [] = []
spot p (x:xs) = if p x then [(x, xs)] else []

token :: Eq a⇒ a→ Parse a a
token t = spot (λc→ t == c)
```

  - Warum nicht none, suceed durch spot? Typ!

Basiskombinatoren: alt, >*>

- Alternierung:
  - Erste Alternative wird bevorzugt

```
infixl 3 `alt`
alt :: Parse a b→ Parse a b→ Parse a b
alt p1 p2 i = p1 i ++ p2 i
```

- Sequenzierung:
  - Rest des ersten Parsers als Eingabe für den zweiten

```
infixl 5 >*>
(>*>) :: Parse a b→ Parse a c→ Parse a (b, c)
(>*>) p1 p2 i =
  concatMap (λ(b, r)→
     map (λ(c, s)→ ((b, c), s)) (p2 r)) (p1 i)
```


Basiskombinatoren: use

- map für Parser (Rückgabe weiterverarbeiten):

```
infix 4 `use`, `use2`
use :: Parse a b→ (b→ c)→ Parse a c
use p f i = map (λ(o, r)→ (f o, r)) (p i)

use2 :: Parse a (b, c)→ (b→ c→ d)→ Parse a d
use2 p f = use p (uncurry f)
```

- Damit z.B. Sequenzierung rechts/links:

```
infixl 5 *>, >*
(*>) :: Parse a b→ Parse a c→ Parse a c
(>*) :: Parse a b→ Parse a c→ Parse a b
p1 *> p2 = p1 >*> p2 `use` snd
p1 >* p2 = p1 >*> p2 `use` fst
```


Abgeleitete Kombinatoren

- Listen: $A^* ::= AA^* \mid \varepsilon$

```
list :: Parse a b→ Parse a [b]
list p = p >*> list p `use2` (:)
         `alt` suceed []
```

- Nicht-leere Listen: $A^+ ::= AA^*$

```
some :: Parse a b→ Parse a [b]
some p = p >*> list p `use2` (:)
```

- NB. Präzedenzen: >*> (5) vor use (4) vor alt (3)

Verkapselung

- Hauptfunktion:
  - Eingabe muß vollständig parsiert werden
  - Auf Mehrdeutigkeit prüfen

```
parse :: Parse a b→ [a]→ Either String b
parse p i =
  case filter (null. snd) $ p i of
    []       → Left "Input␣does␣not␣parse"
    [(e, _)] → Right e
    _        → Left "Input␣is␣ambiguous"
```

- Schnittstelle:
  - Nach außen nur Typ Parse sichtbar, plus Operationen darauf

Grammatik für Arithmetische Ausdrücke

$$
\begin{array}{rcl}
\mathit{Expr} & ::= & \mathit{Term} + \mathit{Term} \mid \mathit{Term} \\
\mathit{Term} & ::= & \mathit{Factor} * \mathit{Factor} \mid \mathit{Factor} \\
\mathit{Factor} & ::= & \mathit{Variable} \mid (\mathit{Expr}) \\
\mathit{Variable} & ::= & \mathit{Char}^{+} \\
\mathit{Char} & ::= & \mathtt{a} \mid \cdots \mid \mathtt{z} \mid \mathtt{A} \mid \cdots \mid \mathtt{Z}
\end{array}
$$

Abstrakte Syntax für Arithmetische Ausdrücke

- Zur Grammatik abstrakte Syntax

```
data Expr   = Plus  Expr Expr
            | Times Expr Expr
            | Var   String
```

- Hier Unterscheidung Term, Factor, Number unnötig.

Parsierung Arithmetischer Ausdrücke

- Token: Char
- Parsierung von Factor

```
pFactor :: Parse Char Expr
pFactor = some (spot isAlpha) `use` Var
        `alt` token '(' *> pExpr >* token ')'
```

- Parsierung von Term

```
pTerm :: Parse Char Expr
pTerm =
  pFactor >* token '*' >*> pFactor `use2` Times
  `alt` pFactor
```

- Parsierung von Expr

```
pExpr :: Parse Char Expr
pExpr = pTerm >* token '+' >*> pTerm `use2` Plus
      `alt` pTerm
```


Die Hauptfunktion

- Lexing: Leerzeichen aus der Eingabe entfernen

```
parseExpr :: String → Expr
parseExpr i =
  case parse pExpr (filter (not.isSpace) i) of
    Right e →  e
    Left err → error err
```


Ein kleiner Fehler

- Mangel: a+b+c führt zu Syntaxfehler — Fehler in der Grammatik
- Behebung: Änderung der Grammatik

$$
\begin{array}{rcl}
\mathit{Expr} & ::= & \mathit{Term} + \mathit{Expr} \mid \mathit{Term} \\
\mathit{Term} & ::= & \mathit{Factor} * \mathit{Term} \mid \mathit{Factor} \\
\mathit{Factor} & ::= & \mathit{Variable} \mid (\mathit{Expr}) \\
\mathit{Variable} & ::= & \mathit{Char}^{+} \\
\mathit{Char} & ::= & \mathtt{a} \mid \cdots \mid \mathtt{z} \mid \mathtt{A} \mid \cdots \mid \mathtt{Z}
\end{array}
$$

- Abstrakte Syntax bleibt

Änderung des Parsers

- Entsprechende Änderung des Parsers in pTerm

```
pTerm :: Parse Char Expr
pTerm =
  pFactor >* token '*' >*> pTerm `use2` Times
  `alt` pFactor
```

- ... und in pExpr:

```
pExpr :: Parse Char Expr
pExpr = pTerm >* token '+' >*> pExpr `use2` Plus
      `alt` pTerm
```

- pFactor und Hauptfunktion bleiben.

Erweiterung zu einem Taschenrechner

- Zahlen:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathit{Factor} & ::= & \mathit{Variable} \mid \mathit{Number} \mid \ldots \\
\mathit{Number} & ::= & \mathit{Digit}^{+} \\
\mathit{Digit} & ::= & 0 \mid \cdots \mid 9
\end{array}
$$

- Eine einfache Eingabesprache:

$$
\mathit{Input} \quad ::= \quad ! \ \mathit{Variable} = \mathit{Expr} \mid \$ \ \mathit{Expr}
$$

- Eine Auswertungsfunktion:

```
type State= [(String, Integer)]
```

```
eval :: State→ Expr→ Integer
```

```
run :: State→ String→ (State, String)
```


Zusammenfassung Parserkombinatoren

- Systematische Konstruktion des Parsers aus der Grammatik.
- Kompositional:
  - Lokale Änderung der Grammatik führt zu lokaler Änderung im Parser
  - Vgl. Parsergeneratoren (yacc/bison, antlr, happy)
- Struktur von Parse zur Benutzung irrelevant
  - Vorsicht bei Mehrdeutigkeiten in der Grammatik (Performance-Falle)
  - Einfache Implementierung (wie oben) skaliert nicht
  - Effiziente Implementation mit gleicher Schnittstelle auch für große Eingaben geeignet.

Zusammenfassung

- map und fold sind kanonische Funktionen höherer Ordnung
- ... und für alle Datentypen definierbar
- Kombinatoren: Funktionen höherer Ordnung als Entwurfsmethodik
  - Einfache Basisoperationen
  - Wenige aber mächtige Kombinationsoperationen
  - Reiche Bibliothek an abgeleiteten Operationen
- Nächste Woche: wie prüft man den Typ von

```
(>*>) p1 p2 i =
  concatMap (λ(b, r)→
     map (λ(c, s)→ ((b, c), s)) (p2 r)) (p1 i)
```

⇝ Typinferenz!