

Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 3 vom 30.10.2012: Rekursive Datentypen

Christoph Lüth

Universität Bremen

Wintersemester 2012/13

Rev. 1935

1 [27]

Fahrplan

- ▶ Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
 - ▶ Einführung
 - ▶ Funktionen und Datentypen
 - ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Typvariablen und Polymorphie
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung I
 - ▶ Funktionen höherer Ordnung II
 - ▶ Typinferenz
- ▶ Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- ▶ Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

2 [27]

Inhalt

- ▶ Rekursive Datentypen
 - ▶ Rekursive Definition
 - ▶ ... und wozu sie nützlich sind
 - ▶ Rekursive Datentypen in anderen Sprachen
 - ▶ Fallbeispiel: Labyrinth

3 [27]

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

Definition eines algebraischen Datentypen T:

$$\text{data } T = \begin{array}{l} C_1 t_{1,1} \dots t_{1,k_1} \\ \dots \\ C_n t_{n,1} \dots t_{n,k_n} \end{array}$$

- ▶ Konstruktoren C_1, \dots, C_n sind disjunkt:
 $C_i x_1 \dots x_n = C_j y_1 \dots y_m \implies i = j$
- ▶ Konstruktoren sind injektiv:
 $C x_1 \dots x_n = C y_1 \dots y_n \implies x_i = y_i$
- ▶ Konstruktoren erzeugen den Datentyp:
 $\forall x \in T. x = C_i y_1 \dots y_m$

Diese Eigenschaften machen Fallunterscheidung möglich.

Heute: Rekursion

4 [27]

Rekursive Datentypen

- ▶ Der definierte Typ T kann rechts benutzt werden.
- ▶ Rekursive Datentypen sind unendlich
- ▶ Entspricht induktiver Definition
- ▶ Modelliert Aggregation (Sammlung von Objekten)
- ▶ Funktionen werden durch Rekursion definiert

5 [27]

Algebraische Datentypen: Nomenklatur

Gegeben Definition

$$\text{data } T = \begin{array}{l} C_1 t_{1,1} \dots t_{1,k_1} \\ \dots \\ C_n t_{n,1} \dots t_{n,k_n} \end{array}$$

- ▶ C_i sind Konstruktoren (vordefiniert)
- ▶ Selektoren sind Funktionen $\text{sel}_{i,j}$:
 $\text{sel}_{i,j} (C_i t_{i,1} \dots t_{i,k_i}) = t_{i,j}$
 - ▶ Partiiell, linksinvers zu Konstruktor
 - ▶ Können vordefiniert werden (erweiterte Syntax der data Deklaration)
- ▶ Diskriminatoren sind Funktionen dis_i :
 $\text{dis}_i :: T \rightarrow \text{Bool}$
 $\text{dis}_i (C_i \dots) = \text{True}$
 $\text{dis}_i _ = \text{False}$
 - ▶ Definitionsbereich des Selektors sel_i
 - ▶ Nie vordefiniert

6 [27]

Uncle Bob's Auld Time Grocery Shoppe Revisited

- ▶ Ein Lager für Bob's Shoppe:
 - ▶ entweder leer
 - ▶ oder es enthält Artikel und Menge, und weiteres

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

7 [27]

Suchen im Lager

- ▶ Rekursive Suche:

```
suche :: Artikel -> Lager -> Resultat
suche art (Lager lart m l)
  | art == lart = Gefunden m
  | otherwise = suche art l
suche art LeeresLager = Nichtgefunden
```

- ▶ Resultat:

```
data Resultat = Gefunden Menge | Nichtgefunden
```

8 [27]

Einlagern

- ▶ Mengen sollen aggregiert werden, e.g. 35l Milch und 20l Milch werden 55l Milch

```
einlagern :: Artikel -> Menge -> Lager -> Lager
einlagern a m l =
  let hinein a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
      hinein a m (Lager al ml l)
          | a == al = Lager a (addiere m ml) l
          | otherwise = Lager al ml (hinein a m l)
      in case preis a m of
        Ungueltig -> l
        _ -> hinein a m l
```

```
addiere (Stueck i) (Stueck j) = Stueck (i + j)
addiere (Gramm g) (Gramm h) = Gramm (g + h)
addiere (Liter l) (Liter m) = Liter (l + m)
addiere m n = error ("addiere: " ++ show m ++ " und " ++ show n)
```

9 [27]

Einkaufen und bezahlen

- ▶ Artikel einkaufen:

```
einkauf :: Artikel -> Menge -> Einkaufswagen -> Einkaufswagen
einkauf a m e =
  case preis a m of
    Ungueltig -> e
    _ -> Einkauf a m e
```

- ▶ Gesamtsumme berechnen:

```
kasse :: Einkaufswagen -> Int
kasse LeeresWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

10 [27]

Beispiel: Kassenbon

```
kassenbon :: Einkaufswagen -> String
```

Ausgabe:

Bob's Aulde Grocery Shoppe			Unveränderlicher Kopf
Artikel	Menge	Preis	

Schinken	50 g.	0.99 EU	Ausgabe von Artikel und Menge (rekursiv)
Milch Bio	1.0 l.	1.19 EU	
Schinken	50 g.	0.99 EU	
Apfel Boskoop	3 St	1.65 EU	

Summe:		4.82 EU	Ausgabe von kasse

11 [27]

Kassenbon: Implementation

- ▶ Kernfunktion:

```
artikel :: Einkaufswagen -> String
artikel LeeresWagen = ""
artikel (Einkauf a m e) =
  formatL 20 (show a) ++
  formatR 7 (menge m) ++
  formatR 10 (showEuro (cent a m)) ++ "\n" ++
  artikel e
```

- ▶ Hilfsfunktionen:

```
formatL :: Int -> String -> String
```

```
formatR :: Int -> String -> String
```

```
showEuro :: Int -> String
```

12 [27]

Rekursive Typen in Java

- ▶ Nachbildung durch Klassen, z.B. für Listen:

```
class List {
  public List(Object el, List tl) {
    this.elem = el;
    this.next = tl;
  }
  public Object elem;
  public List next;
}
```

- ▶ Länge (iterativ):

```
int length() {
  int i = 0;
  for (List cur = this; cur != null; cur = cur.next)
    i++;
  return i;
}
```

13 [27]

Rekursive Typen in C

- ▶ C: Produkte, Aufzählungen, keine rekursiven Typen
- ▶ Rekursion durch Zeiger

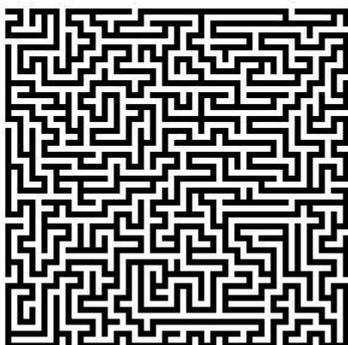
```
typedef struct list_t {
  void *elem;
  struct list_t *next;
} *list;
```

- ▶ Konstruktoren **nutzerimplementiert**

```
list cons(void *hd, list tl)
{ list l;
  if ((l = (list) malloc(sizeof(struct list_t))) == NULL) {
    printf("Out of memory\n"); exit(-1);
  }
  l -> elem = hd; l -> next = tl;
  return l;
}
```

14 [27]

Fallbeispiel: Zyklische Datenstrukturen



Quelle: docs.gimp.org

15 [27]

Modellierung des Labyrinths

- ▶ Ein Labyrinth ist entweder
 - ▶ eine Sackgasse,
 - ▶ ein Weg, oder
 - ▶ eine Abzweigung in zwei Richtungen.

```
data Lab = Dead Id
         | Pass Id Lab
         | TJnc Id Lab Lab
```

- ▶ Ferner benötigt: eindeutige **Bezeichner** der Knoten

```
type Id = Int
```

16 [27]

Traversion des Labyrinths

- ▶ Ziel: **Pfad** zu einem gegebenen **Ziel** finden
- ▶ Benötigt **Pfade** und eine **Strategie**

```
data Path = Cons Id Path
          | Mt
```

```
data Trav = Succ Path
          | Fail
```

17 [27]

Traversionsstrategie

- ▶ An jedem Knoten prüfen, ob Ziel erreicht, ansonsten
 - ▶ an Sackgasse Fail
 - ▶ an Passagen weiterlaufen
 - ▶ an Kreuzungen Auswahl treffen
- ▶ erfordert Propagation von Fail:

```
cons :: Id → Trav → Trav
select :: Trav → Trav → Trav
```
- ▶ Geht von **zyklenfreien** Labyrinth aus

18 [27]

Zyklusfreie Traversion

```
traverse1 :: Id → Lab → Trav
traverse1 t (Dead i)
  | i == t = Succ (Cons i Mt)
  | otherwise = Fail
traverse1 t (Pass i l)
  | t == i = Succ (Cons i Mt)
  | otherwise = cons i (traverse1 t l)
traverse1 t (TJnc i l m)
  | t == i = Succ (Cons i Mt)
  | otherwise = select (cons i (traverse1 t l))
                    (cons i (traverse1 t m))
```

19 [27]

Traversion mit Zyklen

```
traverse2 :: Id → Lab → Path → Trav
traverse2 t (Dead i) p
  | i == t = Succ (rev (Cons i p))
  | otherwise = Fail
traverse2 t (Pass i l) p
  | contains i p = Fail
  | t == i = Succ (rev (Cons i p))
  | otherwise = traverse2 t l (Cons i p)
traverse2 t (TJnc i l m) p
  | contains i p = Fail
  | t == i = Succ (rev (Cons i p))
  | otherwise = select (traverse2 t l (Cons i p))
                    (traverse2 t m (Cons i p))
```

20 [27]

Traversion mit Zyklen

- ▶ Veränderte **Strategie**: Pfad bis hierher übergeben
- ▶ Wenn **aktueller** Knoten in bisherigen Pfad **enthalten** ist, Fail
- ▶ Ansonsten wie oben
- ▶ Neue Hilfsfunktionen

```
contains :: Id → Path → Bool
```

```
rev :: Path → Path
```

21 [27]

Zusammenfassung Labyrinth

- ▶ Labyrinth → **Graph** oder **Baum**
- ▶ In Haskell: gleicher Datentyp
- ▶ Referenzen nicht **explizit** in Haskell
 - ▶ Keine undefinierten Referenzen (erhöhte Programmsicherheit)
 - ▶ Keine Gleichheit auf Referenzen
 - ▶ Gleichheit ist **immer** strukturell (oder selbstdefiniert)

22 [27]

Beispiel: Zeichenketten selbstgemacht

- ▶ Eine **Zeichenkette** ist
 - ▶ entweder leer (das leere Wort ϵ)
 - ▶ oder ein **Zeichen** c und eine weitere Zeichenkette xs

```
data MyString = Empty
              | Cons Char MyString
```

- ▶ **Lineare** Rekursion
 - ▶ Genau ein rekursiver Aufruf

23 [27]

Rekursive Definition

- ▶ Typisches Muster: **Fallunterscheidung**
 - ▶ Ein Fall pro **Konstruktor**
- ▶ Hier:
 - ▶ Leere Zeichenkette
 - ▶ Nichtleere Zeichenkette

24 [27]

Funktionen auf Zeichenketten

► Länge:

```
len :: MyString → Int
len Empty      = 0
len (Cons c str) = 1 + len str
```

► Verkettung:

```
cat :: MyString → MyString → MyString
cat Empty t      = t
cat (Cons c s) t = Cons c (cat s t)
```

► Umkehrung:

```
rev :: MyString → MyString
rev Empty      = Empty
rev (Cons c t) = cat (rev t) (Cons c Empty)
```

25 [27]

Was haben wir gesehen?

► Strukturell ähnliche Typen:

- Einkaufswagen, Path, MyString (Listen-ähnlich)
- Resultat, Preis, Trav (Punktierte Typen)

► Ähnliche Funktionen darauf

- Besser: eine Typdefinition mit Funktionen, Instantiierung zu verschiedenen Typen

~~Nächste Vorlesung

26 [27]

Zusammenfassung

- Datentypen können **rekursiv** sein
- Rekursive Datentypen sind **unendlich** (induktiv)
- Funktionen werden **rekursiv** definiert
- Fallbeispiele: Einkaufen in Bob's Shoppe, Labyrinthtraversion
- Viele strukturell ähnliche Typen
- **Nächste** Woche: Abstraktion über Typen (Polymorphie)

27 [27]