Praktische Informatik 3

Einführung in die Funktionale Programmierung

Vorlesung vom 28.11.2006: Funktionen Höherer Ordnung und Typklassen

Christoph Lüth

WS 06/07

Inhalt

- *Funktionen höherer Ordnung*
  - Letzte VL: *verallgemeinerte Berechnungsmuster* (`map`, `filter`, `foldr`, ...)
  - Heute: Konstruktion *neuer Funktionen* aus *alten*
- *Nützliche Techniken*:
  - *Anonyme* Funktionen
  - *Partielle* Applikation
  - η-Kontraktion
- *Längeres Beispiel*: Erstellung eines Index
- *Typklassen*: Überladen von Funktionen

Funktionen als Werte

Zusammensetzen *neuer* Funktionen aus *alten*.

- *Zweimal hintereinander* anwenden:

```
twice :: (a-> a)-> (a-> a)
twice f x = f (f x)
```

- n*-mal hintereinander* anwenden:

```
iter :: Int-> (a-> a)-> a-> a
iter 0 f x = x
iter n f x | n > 0 = f (iter (n-1) f x)
           | otherwise = x
```


Funktionen als Werte

- *Funktionskomposition*:

```
(.) :: (b-> c) -> (a-> b)-> a-> c
(f . g) x = f (g x)
```

  - `f` *nach* `g`
- Funktionskomposition *vorwärts*:

```
(>.>) :: (a-> b)-> (b-> c)-> a-> c
(f >.> g) x = g (f x)
```

  - *Nicht* vordefiniert!
- *Identität*:

```
id :: a-> a
id x = x
```

  - Nützlicher als man denkt

Anonyme Funktionen

- Nicht *jede* Funktion muss einen *Namen* haben.
- Beispiel (`insertsort`)

```
ins x xs = lessx ++ [x] ++ grteqx where
  (lessx, grteqx) = span less xs
  less z = z < x
```

- Besser: *anonyome Funktion* statt `less`

```
ins' x xs = lessx ++ [x] ++ grteqx where
  (lessx, grteqx) = span (\z-> z < x) xs
```

  - `\x-> E` $\equiv$ `f where f x= E`
  - Auch *pattern matching* möglich:

```
map (\(a,b)-> a+b) [(1,4), (3,2)]
```


Beispiel: Primzahlen

- *Sieb des Erathostenes*
  - Für jede *gefundene Primzahl* `p` alle *Vielfachen* heraussieben
  - Dazu: *filtern* mit `\n-> n ‘mod‘ p /= 0`

```
sieve :: [Integer]-> [Integer]
sieve []     = []
sieve (p:ps) =
  p:(sieve (filter (\n-> n ‘mod‘ p /= 0) ps))
```

- Primzahlen im Intervall `[1..n]`

```
primes :: Integer-> [Integer]
primes n = sieve [2..n]
```

  - NB: Mit 2 anfangen!

Zeigen.

η-Kontraktion

- Beispiel: nützliche *vordefinierte Funktionen*:
  - Disjunktion/Konjunktion von Prädikaten über Listen

```
all, any :: (a-> Bool)-> [a]-> Bool
any p      = or  . map p
all p      = and . map p
```

- *Da fehlt doch was?!*

```
any p = or . map p   ≡   any p x = (or . map p) x
```

- η-Kontraktion:
  - *Allgemein*: `\x-> E x` $\equiv$ `E`
  - Bei *Funktionsdefinition*: `f x = E x` $\Leftrightarrow$ `f = E`

Partielle Applikation

- Funktionen können *partiell* angewandt werden:

```
double :: String-> String
double = concat . map (replicate 2)
```

- Zur Erinnerung: `replicate :: Int-> a-> [a]`

Die Kürzungsregel bei Funktionsapplikation

Bei *Anwendung* der Funktion

$$\texttt{f :: t}_1\texttt{ -> t}_2\texttt{ -> ... -> t}_n\texttt{-> t}$$

auf k *Argumente* mit $k \leq n$

$$\texttt{e}_1\texttt{ :: t}_1\texttt{, e}_2\texttt{ :: t}_2\texttt{, ..., e}_k\texttt{ :: t}_k$$

werden die *Typen der Argumente gekürzt*:

$$\texttt{f :: }\not{\texttt{t}}_1\texttt{ -> }\not{\texttt{t}}_2\texttt{ -> ... -> }\not{\texttt{t}}_k\texttt{ -> t}_{k+1}\texttt{ -> ...-> t}_n\texttt{ -> t}$$
$$\texttt{f e}_1\texttt{ ...e}_k\texttt{ :: t}_{k+1}\texttt{ -> ...-> t}_n\texttt{ -> t}$$

Partielle Anwendung von Operatoren

```
elem :: Int-> [Int]-> Bool
elem x = any (== x)
```

- `(== x)` *Sektion* des Operators == (entspricht `\e-> e == x`)
- Auch möglich: `(x ==)` (entspricht `\e-> x == e`)
- Vergleiche `(3 <)` und `(< 3)`

Gewürzte Tupel: Curry

- *Unterschied* zwischen
  `f :: a-> b-> c` und `f :: (a, b)-> c` ?
  - Links *partielle Anwendung* möglich.
  - Ansonsten *äquivalent*.
- *Konversion:*
  - *Rechts* nach *links*:
    ```
    curry   :: ((a, b)-> c)-> a-> b-> c
    curry f a b = f (a, b)
    ```
  - *Links* nach *rechts*:
    ```
    uncurry :: (a-> b-> c)-> (a, b)-> c
    uncurry f (a, b) = f a b
    ```
  - Es gilt: `curry. uncurry` = `id`, `uncurry. curry` = `id`.

Beispiel: Der Index

- *Problem*:
  - Gegeben ein *Text*
    `brösel fasel\nbrösel brösel\nfasel brösel blubb`
  - Zu erstellen ein *Index*: für *jedes Wort* Liste der *Zeilen*, in der es *auftritt*
    `brösel [1, 2, 3]` `blubb [3]` `fasel [1, 3]`
- *Spezifikation* der Lösung
  ```
  type Doc = String
  type Word= String
  makeIndex :: Doc-> [([Int], Word)]
  ```


Zerlegung des Problems in einzelne Schritte

	Ergebnistyp
1. Text in *Zeilen aufspalten*: (mit `type Line= String`)	`[Line]`
2. Jede *Zeile* mit ihrer *Nummer* versehen:	`[(Int, Line)]`
3. *Zeilen* in *Wörter* spalten (Zeilennummer beibehalten):	`[(Int, Word)]`
4. Liste *alphabetisch* nach Wörtern *sortieren*:	`[(Int, Word)]`
5. *Gleiche Wörter* in unerschiedlichen Zeilen *zusammenfassen*:	`[([Int], Word)]`
6. Alle *Wörter mit weniger als vier Buchstaben* entfernen:	`[([Int], Word)]`

Erste Implementierung:

```
type Line = String
makeIndex =
  shorten .     --    -> [([Int], Word)]
  amalgamate .  --    -> [([Int],Word)]
  makeLists .   --    -> [([Int],Word)]
  sortLs .      --    -> [(Int,Word)]
  allNumWords . --    -> [(Int,Word)]
  numLines .    --    -> [(Int, Line)]
  lines         -- Doc-> [Line]
```


Implementierung von Schritt 1–2

- In *Zeilen zerlegen*: `lines :: String-> [String]` *(vordefiniert)*
- Jede *Zeile* mit ihrer *Nummer* versehen:
  ```
  numLines :: [Line]-> [(Int, Line)]
  numLines lines = zip [1.. length lines] lines
  ```
- Jede *Zeile* in *Wörter* zerlegen:
  Pro Zeile: `words:: String-> [String]` (*vordefiniert*)
  - Berücksichtigt nur *Leerzeichen*.
  - Vorher alle *Satzzeichen* durch *Leerzeichen ersetzen*.

Implementierung von Schritt 3

- Zusammengenommen:
  ```
  splitWords :: Line-> [Word]
  splitWords = words . map (\c-> if isPunct c then ' '
                                 else c) where
     isPunct :: Char-> Bool
     isPunct c = c `elem` ";:.,\'\"!?(){}-\\[]"
  ```
- Auf *alle Zeilen* anwenden, Ergebnisliste *flachklopfen*.
  ```
  allNumWords :: [(Int, Line)]-> [(Int, Word)]
  allNumWords = concat . map oneLine where
     oneLine :: (Int, Line)-> [(Int, Word)]
     oneLine (num, line) = map (\w-> (num, w))
                               (splitWords line)
  ```

Implementation von Schritt 4

- Liste *alphabetisch* nach Wörtern *sortieren*:
  - *Ordnungsrelation* definieren:

```
ordWord :: (Int, Word)-> (Int, Word)-> Bool
ordWord (n1, w1) (n2, w2) =
  w1 < w2 || (w1 == w2 && n1 <= n2)
```

  - Sortieren mit generischer Sortierfunktion `qsortBy`

```
sortLs :: [(Int, Word)]-> [(Int, Word)]
sortLs = qsortBy ordWord
```


Implementation von Schritt 5

- *Gleiche Wörter* in *unterschiedlichen Zeilen* zusammenfassen:
  - Erster Schritt: Jede *Zeile* zu (einelementiger) *Liste von Zeilen*.

```
makeLists :: [(Int, Word)]-> [([Int], Word)]
makeLists = map (\ (l, w)-> ([l], w))
```

- Zweiter Schritt: *Gleiche Wörter* zusammenfassen.
  - Nach Sortierung sind *gleiche Wörter hintereinander*!

```
amalgamate :: [([Int], Word)]-> [([Int],Word)]
amalgamate []  = []
amalgamate [p] = [p]
amalgamate ((l1, w1):(l2, w2):rest)
  | w1 == w2  = amalgamate ((l1++ l2, w1):rest)
  | otherwise = (l1, w1):amalgamate ((l2, w2):rest)
```


Implementation von Schritt 6 — Test

- Alle *Wörter* mit *weniger als vier Buchstaben* entfernen:

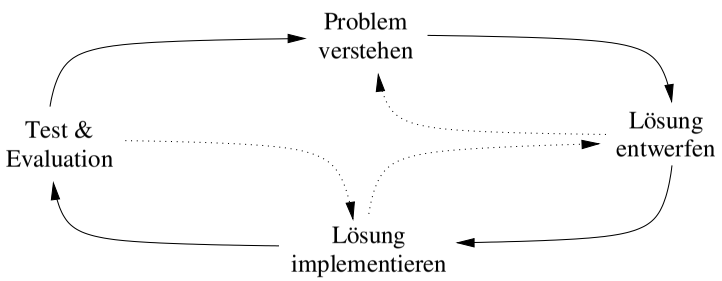
```
shorten :: [([Int],Word)] -> [([Int],Word)]
shorten = filter (\ (_, wd)-> length wd >= 4)
```

  - *Alternative* Definition:

```
shorten = filter ((>= 4) . length . snd)
```

- Testen.

Der Programmentwicklungszyklus



Typklassen

- *Fehler*: `isPunct c = c ‘elem‘ ...`
- *Allgemeinerer Typ* für `elem`:

```
elem :: a-> [a]-> Bool
```

  zu *allgemein* wegen `c ==`
- `(==)` kann *nicht* für *alle* Typen definiert werden:
- *Gleichheit* auf *Funktionen nicht entscheidbar*.
  - z.B. `(==) :: (Int-> Int)-> (Int-> Int)-> Bool`
  - *Extensionale* vs. *intensionale* Gleichheit

Typklassen

- Lösung: `Typklassen`

```
elem :: Eq a=> a-> [a]-> Bool
elem c = any (c ==)
```

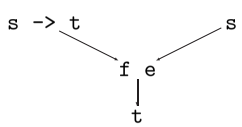
- Für `a` kann jeder Typ eingesetzt werden, für den `(==)` definiert ist.
- `Eq a` ist eine *Klasseneinschränkung* (*class constraint*)

Standard-Typklassen

- `Eq a` für `== :: a-> a-> Bool` (Gleichheit)
- `Ord a` für `<= :: a-> a-> Bool` (Ordnung)
  - Alle Basisdatentypen
  - Listen, Tupel
  - *Nicht* für Funktionen
- `Show a` für `show :: a-> String`
  - Alle *Basisdatentypen*
  - *Listen*, *Tupel*
  - *Nicht* für *Funktionen*
- `Read a` für `read :: String-> a`
  - Siehe `Show`

Typüberprüfung

- *Ausdrücke* in Haskell: *Anwendung* von Funktionen
- Deshalb Kern der *Typüberprüfung*: *Funktionsanwendung*



- Einfach solange Typen *monomorph*
  - d.h. *keine freien Typvariablen*
  - Was passiert bei *polymorphen* Ausdrücken?

Polymorphe Typüberprüfung

- Bei *polymorphen Funktionen*: *Unifikation*.
- Beispiel:

```
f(x,y)  =  (x,  ['a'      ..       y])
                     a-> a-> [a]
               Char
                                  Char
                          [Char]
           a
                (a, [Char])
f :: (a, Char)-> (a, [Char])
```


- Zweites Beispiel:

```
g(m, zs)  =   m    +    length    zs
                        [b]-> Int
                                   [b]
                             Int
                 Int
                     Int
g :: (Int, [b])-> Int
```


- Drittes Beispiel:

```
h = g . f
```

  - `(.) ::(y-> z)-> (x-> y)-> x-> z`
  - `g :: (Int, [b])-> Int`
  - `f :: (a, Char)-> (a, [Char])`
- Hier *Unifikation* von `(a, [Char])` und `(Int, [b])` zu

```
(Int, [Char]
```

- Damit

```
h :: (Int, Char)-> Int
```


Typunifikation

- *Allgemeinste Instanz* zweier Typausdrücke `s` und `t`
  - *Kann undefiniert* sein.
- Berechnung *rekursiv*:
  - Wenn beides *Listen*, Berechnung der Instanz der *Listenelememente*;
  - Wenn beides *Tupel*, Berechnung der Instanzen der *Tupel*;
  - Wenn eines *Typvariable*, zu anderem Ausdruck *instanziieren*;
    - ▷ Dabei *Überprüfung* auf *Diskjunktheit!*
  - Wenn beide *unterschiedlich*, *undefiniert*;
  - Dabei *Vereinigung* der *Typeinschränkungen*
- Anschaulich: Schnittmenge der Instanzen.

Zusammenfassung

- *Funktionen* als *Werte*
- *Anonyme* Funktionen: `\x-> E`
- η-Kontraktion: `f x = E x` $\Rightarrow$ `f` $=$ `E`
- *Partielle Applikation* und Kürzungsregel
- *Indexbeispiel*:
  - Dekomposition in Teilfunktionen
  - Gesamtlösung durch Hintereinanderschalten der Teillösungen
- *Typklassen* erlauben *überladene Funktionen*.
- *Typüberprüfung*